Математическая логика

Практика 7, 8

19/04/2018

Общезначимые формулы логики предикатов

Разминка. Будут ли корректны следующие подстановки терма τ вместо x в формулу φ:

- $\tau = f(x, y)$, $\varphi = \forall y \neg P(x, y) \wedge Q(x, z)$
- $\tau = g(y, z)$, $\varphi = P(x, y) \to \exists x \neg Q(x)$

ПНФ и сколемизация. Напомним некоторые полезные общезначимые формулы.

$$
\begin{aligned}
\neg\forall x\varphi &\leftrightarrow \exists x\neg\varphi\\
\neg\exists x\varphi &\leftrightarrow \forall x\neg\varphi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\forall x\varphi(x)\wedge\forall x\psi(x) &\leftrightarrow \forall x(\varphi(x)\wedge\psi(x))\\
\exists x\varphi(x)\vee\exists x\psi(x) &\leftrightarrow \exists x(\varphi(x)\vee\psi(x))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\exists x\varphi(x)\wedge\psi &\leftrightarrow \exists x(\varphi(x)\wedge\psi), \quad x\notin FV(\psi)\\
\forall x\varphi(x)\vee\psi &\leftrightarrow \forall x(\varphi(x)\vee\psi), \quad x\notin FV(\psi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\exists x\varphi(x)\to\psi &\leftrightarrow \forall x(\varphi(x)\to\psi), \quad x\notin FV(\psi)\\
\forall x\varphi(x)\to\psi &\leftrightarrow \exists x(\varphi(x)\to\psi), \quad x\notin FV(\psi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi\to\forall x\varphi(x) &\leftrightarrow \forall x(\psi\to\varphi(x)), \quad x\notin FV(\psi)\\
\psi\to\exists x\varphi(x) &\leftrightarrow \exists x(\psi\to\varphi(x)), \quad x\notin FV(\psi)
\end{aligned}
$$

$$
\forall x\varphi(x)\to\exists x\psi(x) \leftrightarrow \exists x(\varphi(x)\to\psi(x))
$$

$\mathfrak{Def}$. *Говорят, что предваренная формула является Σ_n-**формулой** если ее кванторная приставка содержит n групп кванторов, причем первыми стоят кванторы существования. Если первыми стоят кванторы всеобщности, то формула является, соответственно, Π_n-**формулой**.*

Задания. Постройте ПНФ формул и сколемизируйте результат до Π_1.

- $\neg\exists x\forall y\exists z\forall u P(x,y,z,u)$
- $\exists x\forall y Q(x,y)\wedge\exists x\forall y R(x,y)$

Вывод из аксиом в исчислении предикатов

В исчислении высказываний у нас с вами было 11 аксиом, которые перекочевали в исчисление предикатов. Кроме этого, добавились две новые аксиомы:

12. $\forall x\varphi \to \varphi(x := \tau)$

13. $\varphi(x := \tau) \to \exists x\varphi$

От подстановки $x := \tau$ требуется корректность.

Правило *Modus Ponens* все еще работает, однако появляются два новых правила вывода – *правила Бернайса* :

$$\frac{\psi \to \varphi}{\psi \to \forall x\varphi}\, B\forall$$

$$\frac{\varphi \to \psi}{\exists x\varphi \to \psi}\, B\exists$$

Работает *правило обобщения*(Gen)

$$\frac{\varphi}{\forall x\varphi}\, Gen$$

Задания:

- Выведите формулу:
$$\exists x\forall y\varphi \to \forall y\exists x\varphi$$

- Покажите, что следующие правила допустимы:

$$\frac{\varphi \to \psi}{\forall x\varphi \to \forall x\psi}$$

$$\frac{\varphi \to \psi}{\exists x\varphi \to \exists x\psi}$$

Домашнее задание

1. Постройте ПНФ формул и сколемизируйте результат до Π_1:
   (a) (1б.) $\exists x\forall y P(x, y) \vee \exists x\forall y Q(x, y)$
   (b) (1б.) $\exists x\forall y P(x, y) \to \exists x\forall y Q(x, y)$
   (c) (2б.) $\exists x\forall y P(y) \to \neg\exists z S(z) \wedge \exists y Q(x, y)$

2. Выведите формулы:
   (a) (1б.) $\forall x\varphi \leftrightarrow \neg\exists x\neg\varphi$
   (b) (1б.) $\exists x\varphi \leftrightarrow \neg\forall x\neg\varphi$