Основные операции над графами. Деревья.

1. Пусть G есть простой граф без треугольников, то есть граф, не содержащий K_3 в качестве своего индуцированного цикла. Показать, что максимальное количество ребер в таком графе не превосходит $n^2/4$.

2. Наряду с диаметром при изучении расстояний в графе часто используется так называемый Wiegner index
$$W(G) := \sum_{x,y \in V(G)} d(x,y)$$
графа G, характеризующий среднее расстояние между вершинами в графе. В частности, Вигнер использовал этот индекс для изучения точки плавления парафина. В дальнейшем оказалось, что многие химические свойства молекул связаны с Wiegner index соответствующих этим молекулам графов. Доказать, что среди всех деревьев на n вершинах минимальное значение $W(G)$ достигается на графах-звездах, а максимальное — на путях P_n длины n.

3. Доказать, что для любого подграфа H графа G расстояние $d_H(x,y)$ между вершинами $x, y \in H$ больше или равно расстоянию $d_G(x,y)$ между теми же вершинами в графе G. Используя данное утверждение, а также предыдущее упражнение, показать, что для любого связного графа G Wiegner index $W(G) \leq P_n$. На каком связном графе, построенном на n вершинах, достигается минимум $W(G)$?

4. Пусть дерево T, построенное на n вершинах, имеет диаметр, больший или равный $2k-3$. Доказать, что в таком дереве имеется как минимум $n-k$ путей длины k.

5. Пусть G есть простой граф на 10 вершинах и 26 ребрах. Доказать, что такой граф содержит в качестве своих индуцированных подграфов по меньшей мере пять треугольников.

6. Неубывающая последовательность чисел
$$\mathbf{s_1} := (s_1, s_2, \ldots, s_n) : \qquad s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_n \leq n-1 \qquad (1)$$
называется последовательностью количества очков, если существует турнир T, построенный на n вершинах, для которого $outdeg(x_i) =$

s_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Доказать, что невозрастающая последовательность является последовательностью количества очков тогда и только тогда, когда последовательностью количества очков оказывается последовательность $\mathbf{s}_2$, полученная из последовательности

$$(s_1, s_2, \ldots, s_{s_n}, s_{s_n+1} - 1, \ldots, s_{n-1} - 1)$$

переупорядочиванием ее членов в порядке неубывания.

7. Доказать, что любой 3-регулярный граф G имеет точку сочленения тогда и только тогда, когда в нем содержится мост.

8. Пусть G есть простой граф, построенный на 10 вершинах и имеющий 38 ребер. Доказать, что G содержит K_4 в качестве своего индуцированного подграфа.

9. Полным m-арным деревом называется корневое дерево, у которого любая вершина, отличная от листа, имеет ровно m сыновей. Предположим, что у такого дерева имеется k вершин, отличных от листа. Доказать, что в таком дереве имеется $(m-1)k + 1$ лист.