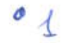
⑨ Перечисление деревьев. Ф-ла ~~Лагранжа~~ Лагранжа.

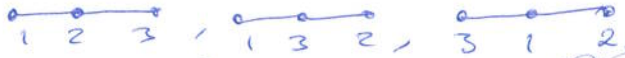
1. Напомним, что дерево — это связный граф, не имеющий циклов. Основной вопрос: как много $\exists$ помеченных деревьев?

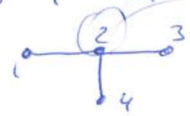
В теории графов с пом. матричной Th о деревьях доказывалось, что это число $= n^{n-2}$. Наша основная задача — д-ть это с пом. аппарата экспоненц. произв. функций.

1) Давайте тупо переберем все деревья (помеченные) с $n \le 4$:

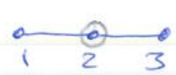
а) $n=1$: $a_1 = 1$: 

б) $n=2$: $a_2 = 1$ 

в) $n=3$: $a_3 = 3$: 

г) $n=4$: $a_4 = 16$:  $= 12$;  $\times 4$ — в завис. от выбора этой цифры.

2) Опр-е Корневым помеченным деревом наз. помеченное дерево, в кот. одна из вершин помечена как корень.

Так как $\forall$ из n вершин можно выбрать в кач-ве корня, то кол-во таких деревьев в n раз больше кол-ва a_n обычных помеченных деревьев: $t_n = n \cdot a_n \Rightarrow t_n = ?$  — корневое дерево

3) Опр-е Корневой лес — это помеченный граф, $\forall$ связная компонента кот. представляет собой корневое помеченное дерево. Из экспоненц. ф-лы следует, что если

$$\underbrace{T(x)}_{trees} = t_1\frac{x^1}{1!} + t_2\frac{x^2}{2!} + \dots + t_n\frac{x^n}{n!} + \dots \text{ —}$$

эксп. произв. ф-ция для послед-ти $\{t_n\}$ корневых помеченных деревьев, а

$$\underbrace{For(x)}_{forests} = f_0 + f_1\frac{x^1}{1!} + f_2\frac{x^2}{2!} + \dots + f_n\frac{x^n}{n!} + \dots \text{ — — лесов,}$$

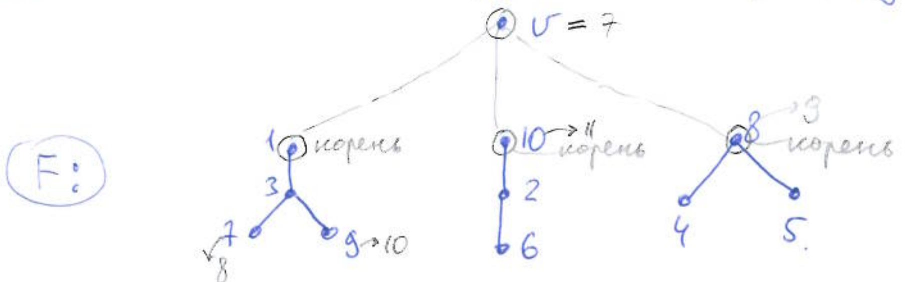
то

$$For(x) = e^{T(x)}$$

4) Проблема пока состоит в том, что не понятно, как искать ни f_n, ни t_n. Однако: оказывается, что f_n и t_n связаны очень простым равенством (Polia, 1937г.):

$$\boxed{t_{n+1} = (n+1)\cdot f_n}, \quad n \geq 0 \qquad (*)$$

Давайте его докажем. Для этого возьмем какой-либо лес (корневой помеченный лес), состоящий из n вершин; например:



Затем: ~~доба~~ введем новую вершину v и присвоим ей ~~кажд~~ номер $j = 1, \dots, n+1$. Затем: ~~...~~ перенумеруем вершины леса F с.о.: вершины ~~...~~ с номерами от 1 до $j-1$ не трогаем, а вершины ~~от~~ с номерами от j до n увеличиваем на единицу. Наконец, соединим вершину v (с номером j) со всеми корнями компонент связности нашего леса, и помечаем вершину $v=j$ в качестве ~~...~~ корня получившегося корневого помеченного дерева, состоящего из $(n+1)$ вершин. Так как j меняется от 1 до $(n+1)$, то мы, таким образом, для данного леса получили $(n+1)$ корневое помеченное деревья, в кот. ~~...~~ корень (т.е. вершина v) меняется от 1 до $(n+1)$; все они отвечающие заданному лесу, состоящему из n вершин.

Очевидно, верно и обратное: какое бы я корневое дерево с корнем $v = j$ ($j=1,\dots,n+1$) не взял, я после удаления этой вершины и инцидентных ей ребер, ~~...~~ а также после перенумерации вершин с номерами $j+1, \dots, n+1$ на вершины с номерами $j, \dots, n$ получаю корневой лес, корнем $\forall$ из компонент связности которого является вершина, изначально соседняя с вершиной v.

Еще раз: у нас имеется корневое дерево с корнем, помеченным индексом, $=1$. Из него я могу описанным выше алгоритмом построить дерево с корнем, помеч. индексом $2, \dots, n+1$ $\Rightarrow$ строю по одному дереву $(n+1)$ штук и всем им отвечает один и тот же лес из n вершин $\Rightarrow$

5) Теперь:

$$\mathrm{For}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_{n+1}}{(n+1)} \frac{x^n}{n!} = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} t_{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}_{=T(x)} \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{For}(x) = \frac{1}{x} T(x) = e^{T(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = T(x) e^{-T(x)}} \iff \boxed{T(x) = x e^{T(x)}} \quad (**)$$

Получили некое функциональное ур-ие на производящую ф-цию $T(x)$.

6) Замечание. Рав-во (**) можно написать и сразу, если понять комбинаторный смысл пр-ия 2х экспонент: произв. ф-ций – x и $F(x)$:

а) $\exists$ $H(x) = x \cdot F(x) = x \cdot a_0 + x^2 \frac{a_1}{1!} + x^3 \frac{a_2}{2!} + \ldots + x^{n+1} \frac{a_n}{n!} + \ldots =$

$$= a_0 x + 2a_1 \frac{x^2}{2!} + 3a_2 \frac{x^3}{3!} + \ldots + (n+1)a_n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots = c_0 + c_1 x + c_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots + c_{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

б) Это есть частный случай пр-ия 2х эксп. произв. ф-ций $\Rightarrow$ здесь: мы берем $(n+1)$-элтное мн-во (различимых неупорядоченных) элементов, разбиваем его на 2 подмн-ва (упорядоченных): в 1м содержится один элемент (т.н. корень), во 2м – оставшиеся n элтов; понятно, что сделать это я могу $(n+1)$-м способом; затем над элтами 2-го подмн-ва мы совершаем комбинатор. действие a_n способами. (например, строю некоторую структуру (лес) на этих n элтах f_n способами)

$\Rightarrow c_n = (n+1) \cdot a_n$

в) Так вот у нас ровно это здесь и происходит. Как нам на $(n+1)$-элементном мн-ве построить корневое дерево? Нам надо взять, разбить $(n+1)$-элтное мн-во на 2 подмн-ва, $(n+1)$-м способом выбрав корень, а на оставшемся n-элтном мн-ве построить ~~лес~~ корневой лес f_n числом способов; соединив затем корни этого леса с выбранным на 1м этапе корнем, мы и получаем корневое дерево

$\Rightarrow t_{n+1} = (n+1) \cdot f_n \iff T(x) = x e^{T(x)}$.

7) Сразу же здесь: а интересно, каков тогда комбинаторный смысл производной $F'(x)$ (эксп.) производящ. функции $F(x)$?

а) Пусть $H(x)=F'(x)=a_1+a_2\frac{x}{1!}+a_3\frac{x^2}{2!}+\dots+a_{n+1}\frac{x^n}{n!}+\dots=:c_0+c_1x+\dots+c_n\frac{x^n}{n!}$, $c_n=a_{n+1}$

б) Смысл: у нас есть мн-во, состоящее из n элементов, и к нему одним-единственным способом добавляю еще один ($n+1$-й) элемент, а затем a_{n+1} способом совершаю над этими элементами комбинаторное действие (напр., строю некоторую структуру на $(n+1)$-м элементе).

в) Пример. Пусть $\tilde{T}(x)$ — это экспоненц. производящая функция для свободных деревьев, т.е. деревьев обычных, помеченных, без корня; $F(x)$ — эксп. произв. функция для корневых лесов

$$\Rightarrow \quad F(x)=\tilde{T}'(x) \iff f_n=\tilde{t}_{n+1}=\frac{t_{n+1}}{(n+1)}$$

Действительно, мы берем корневой лес, построенный на n элтах, добавляем к нему вершину с номером $(n+1)$, а затем соединяем ее с корнями леса $\Rightarrow$ получаем свободное дерево на $(n+1)$-й вершине. Кол-во способов сделать это $=\tilde{t}_{n+1}$ и оно, по построению, $=$ кол-ву f_n способов построения на n вершинах корневого леса. Наоборот, берем $\forall$ свободное дерево, удаляем из него $(n+1)$-ю вершину, все соседние с ней вершины объявляем корнями леса $\Rightarrow$ получаем некое корневое дерево на n вершинах.

8) Наконец, тогда уж давайте поймем комбинаторный смысл выражения

$$H(x)=xF'(x)=a_1x+2a_2\frac{x^2}{2!}+\dots+n\cdot a_n\frac{x^n}{n!}+\dots=c_0+c_1x+\dots+c_n\frac{x^n}{n!}$$

$$\Rightarrow c_0=1,\ c_n=n\cdot a_n$$

а) Смысл: мы берем n элтов, совершаем над ними комбинат. действие, а затем n способами выбираем из них „корень" — какой-то помеченный элемент.

б) Пример: $T(x)=x\cdot\tilde{T}'(x) \iff t_n=n\tilde{t}_n$: берем своб. дерево и n способами корне-

2. Как же нам теперь решать функциональные уравнения вида

$$T(x) = x\, e^{T(x)} \ ?$$

Ответ: для этого ∃ т.н. Th Лагранжа. ~~[illegible]~~

(с нулевым свободным членом!)

1). Th Лагранжа связана с обыкновенными производящими функциями, а, точнее, с ~~[illegible]~~ бинарной операцией на мн-ве обыкнов. произв. функций — композицией этих обыкнов. произв. функций.

а) Напомним, что если у нас имеется мн-во с введенной на нем бинарной операцией (или, еще говорят, законом композиции) (т.е.: когда ∀ упорядоченной паре f, g эл-тов этого мн-ва ставится в соответствие однозначно определенный эл-т $h := g(f) = g\circ f$ этого мн-ва), и эта операция является ассоциативной, то такое мн-во с заданной на нем бинарной ассоциативной операцией наз. полугруппой. У нас на мн-ве обыкнов. произв. функций такая операция задана — это операция композиции пары обыкнов. произв. функций.

б) Далее, очевидно, что на нашем мн-ве ∃ нейтральный элемент (относит. этой операции) — это $e(x) := x$, действительно,

$$f(e(x)) = f(x); \qquad e(f(x)) \xlongequal{\text{def композиции}} 1\cdot f(x)$$

~~Назов~~ Полугруппа с единичным или, ⟺, нейтральным эл-том наз. моноидом в теории алгебраич. структур ⟹ мн-во обыкнов. произв. функций с бинарной операцией-композицией этих функций — представляет собой с этой т. зрения моноид (или полугруппу с единицей).

в) Теперь: если для эл-та $f\in X$ ∃ эл-т $g\in X$, такой, что $f\circ g = e$, то тогда эл-т f наз. обратимым, а элемент g — обратным к нему эл-том. Вообще говоря, ∃ левый обратный к f и правый обратный к f, но ~~[illegible]~~ для моноидов доказывается, что если ∃ левый обратн…

то ∃ и правый обратный, и наоборот, и они совпадают. Если ∀ элем. моноида обратим, то этот моноид наз. группой. У нас, к сожалению, это не так – обратимой является не ∀ обыкнов. произв. функц.

г) Предложение. Обыкновенная производящая функция $f(x)=a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots$ обратима относительно операции композиции произв. функций т.и т.т., к. $a_1\neq 0$. В этом случае обыкновенная произв. функция $g(x)=b_1x+b_2x^2+\dots+b_nx^n+\dots$, удовлетворяющая условию $g(f(x))=x$ или равносильному условию $f(g(x))=x$, единственна (и, естественно, тоже обратима).

∃ $g(f(x))=x$; ∃ $f(l(x))=x$, подставляя напр. вместо x в 1е равно $l(x)$, получим $g(f(l(x)))=l(x) \Rightarrow x \Rightarrow l(x)=g(x)$.

(т.е. $g(f(x))=f(g(x))$, если $g(f(x))=x$; ∃ $h(x)=g(f(x))$; ∃ $l(x)=f(g(x))$. Подставим например $l(x)$ вместо x в 1е равно, получим: $h(l(x))=$

Итак, обыкновенная производящая функция обратима (относит. ~~...~~ операции композиции) т.и т.т., к. $a_0=0,\ a_1\neq 1$. $f=g^{-1}$; $g=f^{-1}$.

левый обратный = правому обратному!

Т.к. не все обыкнов. произв. функции обладают этими свойствами, то мн-во этих функций с введенной на нем операцией композиции группой не является.

д) Докажем наше предложение: ∃

$$g(f(x))=x \iff f(g(x))=x \iff$$

$$\iff b_1(a_1x+a_2x^2+\dots)+b_2(a_1x+a_2x^2+\dots)^2+b_3(a_1x+a_2x^2+\dots)^3+\dots=x$$

$$\iff a_1(b_1x+b_2x^2+\dots)+a_2(b_1x+b_2x^2+\dots)^2+a_3(b_1x+b_2x^2+\dots)^3=x$$

Приравнивая коэф-ты при одинак. степенях x в обеих частях этого равен., получаем след. систему линейных алгебраич. уравн. относит. b_i вида

$$b_1a_1=1 \iff b_1=\frac{1}{a_1} \qquad b_1a_1=1 \iff a_1=\frac{1}{b_1}$$

$$b_1a_2+b_2a_1^2=0 \iff b_2=\frac{b_1a_2}{a_1^2}=\frac{a_2}{a_1^3} \qquad a_1b_2+a_2b_1^2=0 \iff a_2=\frac{a_1b_2}{b_1^2}$$

$$\Rightarrow a_2=b_2a_1^3=\frac{b_2}{b_1^3}$$

$$b_1a_3+2b_2a_1a_2+b_3a_1^3=0$$

из которой (при условии $a_1 \neq 0$) последовательно и однозначно можно найти $b_1, b_2, b_3, \dots \Rightarrow \dots$.

2) Вернемся к задаче о перечислении корневых помеченных деревьев. Там мы для экспоненц. произв. функц. $T(x) = t_1 + t_2 \frac{x^2}{2!} + t_3 \frac{x^3}{3!} + \dots$ получили след. функциональное ур-е:

$= 1 + 2 \cdot \frac{x^2}{2!} + 9 \frac{x^3}{3!} + 64 \frac{x^4}{4!} + \dots$

$$T(x) = x \cdot e^{T(x)} \qquad (*)$$

а) Введем числа $\hat{t}_n = \frac{t_n}{n!} \Rightarrow$ получим обыкновенную произв. функцию $\hat{T}(x) = \hat{t}_1 + \hat{t}_2 x + \dots + \hat{t}_n \cdot x^n + \dots$

б) Далее, введем обыкнов. произв. функцию

$$\varphi(x) = e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots,$$ т.е.

производящую функцию для числ. посл-ти $\varphi_n = 1/n!$

в) Тогда: $(*) \Leftrightarrow \hat{T}(x) = x \cdot \varphi(\hat{T}(x)) \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \frac{\hat{T}(x)}{\varphi(\hat{T}(x))} = x \Longleftrightarrow x = \hat{T}(x) e^{-\hat{T}(x)}$$

Если ввести теперь функцию $f(x) = \frac{x}{\varphi(x)}$, т.е. $f(x) = xe^{-x}$, то получим, что дело сводится к нахождению функции $\hat{T}(x)$, обратной $f(x)$:

$$f(\hat{T}(x)) = x \Longleftrightarrow \hat{T}(x) e^{-\hat{T}(x)} = x \cancel{\Longleftrightarrow \hat{T}(x) = g^{-1}(x)}$$

~~г) Так как~~

~~Но: $\boxed{g(f(x)) = f(g(x))}$, если $g(f(x)) = x$~~

~~$f(g(x)) = \varphi(x)$, $g(f(x)) = h(x)$ $\Rightarrow$~~

Или: $\hat{T}(f(x)) = x \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \hat{T}(xe^{-x}) = x$, где $\boxed{f(x) = xe^{-x}}$

г) Можно уже пытаться отсюда находить коэфф-ты $\hat{t}_n$:

∃ $\hat{T}(x) = \hat{t}_1 x + \hat{t}_2 x^2 + \hat{t}_3 x^3 + \dots$;

$f(x) = xe^{-x} = x(1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \dots) = x - x^2 + \frac{1}{2!}x^3 - \frac{1}{3!}x^4 + \dots$

$\Rightarrow \hat{t}_1 (x - x^2 + \frac{1}{2!}x^3 - \frac{1}{3!}x^4 + \dots) + \hat{t}_2 \cdot (x - x^2 + \frac{1}{2!}x^3 - \frac{1}{3!}x^4 + \dots) + \hat{t}_3 (x - \dots)^3 = x$

$\Rightarrow \quad x^1: \ \hat{t}_1 = 1 \quad \Rightarrow t_1 = 1$

$x^2: \ -\hat{t}_1 + \hat{t}_2 = 0 \Rightarrow \hat{t}_2 = 1 \quad \Rightarrow t_2 = 2! \cdot \hat{t}_2 = 2$

$x^3: \ \hat{t}_1/2 - 2\hat{t}_2 + \hat{t}_3 = 0 \Rightarrow \hat{t}_3 = 2 - 1/2 = 3/2 \Rightarrow t_3 = 3! \cdot \frac{3}{2} = 9$

......

д) Но: нельзя-ли найти явное выражение для коэф-тов $\hat{t}_n$? Оказывается, можно.

---

3). Th ∃ $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$, $a_1 \neq 0$,

$g(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots$, $b_1 \neq 0$,

и ∃ $f(x)$ и $g(x)$ — ~~обрат~~ взаимно-обратные функции по отношению к операции композиции. Тогда b_n равен коэф-ту при x^{-1} в разложении функции

$\frac{1}{n}\frac{1}{f^n(x)}$: (**) $\boxed{b_n \overset{def}{=} [x^n]\, g(x) = \frac{1}{n}[x^{-1}]\frac{1}{f^n(x)}}$

в ряд Лорана с конечным числом отрицат. слагаемых

а) Прежде чем доказывать, давайте поймем, о чем идет здесь речь на нашем примере перечисления помеченных корневых деревьев. У нас

$f(x) = xe^{-x} \Rightarrow f^n(x) = x^n e^{-nx} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{f^n(x)} = \frac{e^{nx}}{x^n} = \frac{1}{x^n}\left(1 + nx + \frac{(nx)^2}{2!} + \dots + \frac{(nx)^n}{n!} + \dots\right)$

В общем случае: $\frac{1}{f^n(x)} = \frac{1}{x^n} \cdot \frac{1}{(a_1 + a_2 x + \dots)}$ $a_1 \neq 0$ — умеем обращать и возводить в степень; но: все $\frac{1}{x^n} \Rightarrow$ ряд Лорана с отрицат. частью длины n

получили ряд Лорана с конечным числом отрицат. слаг.

Вроде как, всегда если $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots$, $a_1 \neq 0$, то $\frac{1}{f^n(x)}$ будет иметь в окр-ти т. $x=0$ полюс n-го порядка $\Rightarrow$ будет рас-

Нам нужно сосчитать коэфф-т при x^{-1} в этом ряде: [9

$$\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n-1}} + \dots + \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{n}{x} + \frac{n^n}{n!} + \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{коэфф-т} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \Rightarrow \hat{t}_n = \frac{n^{n-1}}{n\cdot(n-1)!} = \frac{n^{n-1}}{n!} \Rightarrow t_n = n^{n-1}$$

т.е. коэфф-у $[x^{n-1}]\, f^n(x)\, e^{nx}$ при $(n-1)$-й степ. в исх. ряде e^{nx}

б) Док-во теоремы: $g(f(x)) = x \iff$

$$\iff b_1 f(x) + b_2 f^2(x) + \dots + b_n f^n(x) + \dots = x.$$

Затем: продифф-уем это рав-во по x $\Rightarrow$ получим:

$$b_1 f'(x) + 2b_2 f(x) f'(x) + \dots + n\cdot b_n \cdot f^{n-1}(x)\cdot f'(x) + \dots = 1.$$

Наконец, поделим это рав-во на $f^n(x)$:

$$(*) \quad b_1 \frac{f'(x)}{f^n(x)} + 2b_2 \cdot \frac{f'(x)}{f^{n-1}(x)} + \dots + b_n \cdot n \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} + b_{n+1}(n+1)\cdot f'(x) + \dots = \frac{1}{f^n(x)}$$

в) Теперь: Рассмотрим для $\forall k \neq -1$ выражение вида

$$f^k(x)\, f'(x) \qquad (k = -n, -n+1, \dots, -2, 0, 1, 2, \dots)$$

Очевидно, что $= \frac{1}{k+1}\left(f^{k+1}(x)\right)'$ $\forall k \neq -1$.

(Кстати: $\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln f(x))'$)

Теперь: я хочу собрать в выражении (*) все коэфф-ты при x^{-1}. Я утверждаю, что в левой части вклад в коэфф-т при x^{-1} может дать только слагаемое

$$b_n \cdot n \cdot \frac{f'(x)}{f(x)};$$

у остальных слагаемых этот коэфф-т $\equiv 0$. Как это док-ть?

Теперь заметим, что если ф-ция

$$h(x) = \frac{c_{-n}}{x^n} + \frac{c_{-n+1}}{x^{n-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{x} + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots,$$

т.е. представляется рядом Лорана, то

$$h'(x) = \dots - \frac{c_{-1}}{x^2} + 0 + c_1 + 2c_2 x + \dots,$$ т.е.: коэфф-т

при x^{-1} у производной от такой функции $h(x) = 0$

Как следствие, все коэфф-ты при x^{-1} в слагаемых вида

$$f^k(x)f'(x) \quad \text{тождественно} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ отличным от нуля м.б. только коэфф-т при x^{-1} в выражении $\frac{f'(x)}{f(x)}$. Но: либо нужен деление (формального):

$$\frac{a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots}{a_1 x + a_2 x^2 + \dots} = \frac{1}{x}\cdot\left[\frac{1 + 2\frac{a_2}{a_1}x + \dots}{1 + \frac{a_2}{a_1}x + \dots}\right]:$$

можно показать, что коэфф-т при $\frac{1}{x}$ равен 1, либо, еще легче, $C_{-1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1 + \frac{2a_2}{a_1}x + \dots}{1 + \frac{a_2}{a_1}x + \dots} = 1$. Таким образом, мы получили, что в левой части (*) коэфф-т при x^{-1} равен $n \cdot b_n \Rightarrow$ тому же равен коэфф-т в правой части $\Rightarrow \dots$ •

(Следствие Тh Лагранжа)

4) Замечание 1. Напомним, что мы в задаче о перечислении корневых помеченных деревьев стартовали с урия

$$\hat{T}(x) = x \cdot \varphi(\hat{T}(x)), \text{ где } \varphi(x) = e^x.$$

В общем случае, когда вместо $\hat{T}(x)$ у нас имеется какая-то функ. $g(x)$, имели бы

$$\boxed{g(x) = x \cdot \varphi(g(x))} \quad (***)$$

Заметим, что если вместо функ. $\varphi(x)$ ввести функцию $f(x) = \frac{x}{\varphi(x)}$, то

$$(***) \Longleftrightarrow \frac{g(x)}{\varphi(g(x))} = f(g(x)) = g(f(x)) = x \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ для нахождения b_n тут же пользуемся теоремой Лагранжа (**). Но: функциональные ур-ия вида (***) на практике встречаются ~~неесаленее~~ столь же часто, сколь и ур-ия

$$f(g(x)) = g(f(x)) = x \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ имеет смысл для (***) получить ф-лу аналогичную ф-ле (**).

а) Для этого: еще раз запишем (**):

$$[x^n]\, g(x) = b_n = [x^{-1}] \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{f^n(x)}$$

б) Но: $f(x) = \dfrac{x}{\varphi(x)}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow [x^n]\, g(x) = b_n = \frac{1}{n} [x^{-1}] \cdot \frac{\varphi^n(x)}{x^n}$$

в) Теперь заметим, что если

$$h(x) = \frac{c_{-n}}{x^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{x} + c_0 + c_1 x + \ldots, \text{ то}$$

$$h(x) = \frac{1}{x^n} [c_{-n} + c_{-n+1} x + \ldots + c_{-1} x^{n-1} + c_0 x^n + \ldots] =: \frac{\hat{h}(x)}{x^n}$$

$\Rightarrow$ коэф-ту при x^{-1} функ-ии $h(x)$ отвечает коэф-нт при x^{n-1} функ-ии $\hat{h}(x)$

г) Тогда окончательно можем записать:

$$\boxed{g(x) = x \cdot \varphi(g(x))} \iff \boxed{[x^n]\, g(x) = b_n = \frac{1}{n} [x^{n-1}]\, \varphi^n(x)}$$

д) Пример. Для корневых помеченных деревьев:

$b_n = \hat{t}_n$; $g(x) = \hat{T}(x)$; $\varphi(x) = e^x \Rightarrow b_n = \hat{t}_n = \frac{1}{n} [x^{n-1}]\, e^{nx} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \hat{t}_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^{n-1}}{n!} \Rightarrow t_n = n^{n-1}$$

5) Замечание 2 Все это - замечательно, но причем тут Лагранж?

Дело в том, что, на самом-то деле, мы рассматривали классическую задачу мат. анализа о построении обратной функции:

$$\begin{cases} g(f(x)) = g(y) = x, \\ y = f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots; \end{cases}$$

Хотим: получить обратную функцию

$$x = g(y) = b_1 y + b_2 y^2 + \ldots + b_n y^n + \ldots \Rightarrow \ldots$$

---

6) Замечание 3. Мы говорили, что если эксп. произв. функция $F(x)$ перечисляет ~~односвязные~~ одно связные структуры, то функция $\frac{1}{k!}(F(x))^k$ — k-связные.

Мы с помощью Тh Лагранжа нашли $T(x)$ — эксп. произв. функцию для корневых помеченных деревьев. Можно ли сразу обобщить эту ф-лу на случай функции $[F(x)]^k$? Точнее, на $[\tilde{F}(x)]^k$, где $\tilde{F}(x)$ — обычнов. произв. функция?

Оказывается, да, можно - рассуждения лишь немного усложнятся.

a) $\exists$, по-прежнему, $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots;$

$$g(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots,$$

и $\exists$ $g(f(x)) = f(g(x)) = x$. Как найти коэфф-т

$$[x^n]\, g^k(x) \ ?$$

б) $\exists\ g^k(x) = h(x) = p_k x^k + p_{k+1} x^{k+1} + \ldots + p_n x^n + \ldots$

Тогда: подставим сюда вместо x функц $f(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[g(f(x))\right]^k = x^k = p_k f^k(x) + p_{k+1} f^{k+1}(x) + \ldots + p_n f^n(x) + \ldots$$

Продифф-уем это равво по x:

$$k\cdot x^{k-1} = k\cdot p_k \cdot f'(x) f^{k-1}(x) + (k+1)\cdot p_{k+1}\cdot f'(x) f^k(x) + \ldots + n\cdot p_n f'(x) f^{n-1}(x) + \ldots$$

Наконец, снова, как и в случае $k=1$, поделим это равво на $f^n(x) \Rightarrow$ получим:

$$\frac{k\cdot x^{k-1}}{f^n(x)} = k\cdot p_k \cdot \frac{f'(x)}{f^n(x)} + (k+1)\, p_{k+1} \frac{f'(x)}{f^{n-1}(x)} + \ldots + n\cdot p_n \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} + \ldots$$

Еще раз: то, что стоит слева и справа - это ряд Лорана с конечным числом отрицат. показателей.

Например, $\dfrac{k\cdot x^{k-1}}{f^n(x)} = \dfrac{k\cdot x^{k-1}}{x^n (a_1 + a_2 x + \ldots + a_i x^i + \ldots)^n} = k\cdot x^{k-1-n}\cdot \left[(a_1 + \ldots)^{-1}\right]^n$.

в) Теперь: для всех $i \neq n$: мы опять получаем производные

$$\left[f(x)\right]^{i-n-1}\cdot f'(x) = \frac{1}{(i-n)}\cdot \frac{d}{dx}\left(\left[f(x)\right]^{i-n}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ коэфф-нт при x^{-1} от таких слагаемых $=0$.

г) Тогда: $[x^{-1}]\cdot n\cdot p_n \cdot \dfrac{f'(x)}{f(x)} = [x^{-1}]\, n\cdot p_n \cdot \dfrac{a_1 + 2a_2 x + \ldots}{a_1 x + a_2 x^2 + \ldots} = [x^{-1}]\, n\cdot p_n \left(\dfrac{1}{x} + \ldots\right)$

$\Rightarrow$ коэфф-нт при x^{-1} равен $n\cdot p_n \Rightarrow$ получаем равво

$$\boxed{[x^{-1}]\ \frac{k\cdot x^{k-1}}{f^n(x)} = n\cdot p_n = n\cdot [x^n]\, g^k(x)}\ -$$

обобщенная ф-ла Лагранжа.

д) Ответ: для случая ур-ия Лагранжа

$$g(x) = x\cdot\varphi(g(x)):$$

имеем: $f(x) = \frac{x}{\varphi(x)} \Rightarrow f^{-n}(x) = \frac{\varphi^n(x)}{x^n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow [x^{-1}]\, \frac{k\cdot x^{k-1}}{x^n}\,\varphi^n(x) = [x^{n-k}]\cdot k\cdot\varphi^n(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{n\cdot[x^n]\, g^k(x) = k\cdot[x^{n-k}]\,\varphi^n(x)}$$

---

e) Пример: для k-компонентных корневых помеченных лесов имеем:

$$[x^n]\,\hat{T}^{(k)}(x) = \frac{k}{n}\cdot[x^{n-k}]\,e^{nx} = \frac{k}{n}\cdot\frac{n^{n-k}}{(n-k)!} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ кол-во k-компонентных корневых помеченных лесов на мн-ве $[n]$ равно $\boxed{\frac{n!}{k!}\cdot\frac{k}{n}\cdot\frac{n^{n-k}}{(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}n^{n-k}}$

---

7) Еще раз: вернемся к мат. анализу, вернее, к ТФКП.

а) Лагранж решил задачу об обращении ф-ции вида

$$y = f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots;$$

задача была построить обратную ф-цию

$$x = g(y) = b_1 y + b_2 y^2 + \ldots$$

б) Бурман: математик — современник Лагранжа несколько обобщил эту задачу, а именно: он ~~задал~~ захотел построить разложение ф-ции

→ z: т.к. $z \in \mathbb{C}$

$$G(z) = g(f(z)) = b_0 + b_1 f(z) + b_2 f^2(z) + \ldots + b_n f^n(z) + \ldots$$

по заданной ф-ции $f(z)$ (например, $f(z)$ м.б. задана в виде ряда

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots;$$ при этом: $a_0 = 0$! $a_1 \neq 0$!

По сути, это — обобщение ряда Тейлора (когда $f(z)=z$)
⊕ обобщение ф-лы Лагранжа (когда $g(f(z))=z$, $G(z)$)
Как же это делается?

в) Рассмотрим вокруг т. $z=0$ замкнутый контур C, ограничивающий область D на комплексной плоск., в кот. функции $\tilde{G}(z)=g(f(z))$ и $f(z)$ явл. регулярными.
Рассмотрим тогда $\int$-л

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\tilde{G}(\zeta)f'(\zeta)}{f(\zeta)-f(z)}\,d\zeta =: I(z)$$

Тогда: $f'(0)\neq 0$ по построению, ~~$f(0)=0$~~ подынтегральная функ. имеет в т. $\zeta=z$ полюс (т.к. $f(\zeta)-f(z)\xrightarrow[\zeta\to z]{}0$) 1го пор-ка; вычет функ. в этой т. равен

$$\operatorname*{Res}_{\zeta=z}\frac{\tilde{G}(\zeta)f'(\zeta)}{f(\zeta)-f(z)}=\frac{\tilde{G}(z)f'(z)}{f'(z)}=\tilde{G}(z)\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по Th о вычетах, этот $\int$-л $I(z)=\tilde{G}(z)\Rightarrow$
$\Rightarrow$ получаем ф-лу, обобщающую ф-лу Коши:

$$\boxed{\tilde{G}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{\tilde{G}(\zeta)f'(\zeta)}{f(\zeta)-f(z)}\,d\zeta}\quad\left(\begin{array}{c}\text{в ф-ле Коши}\\ f(z)=z\end{array}\right)$$

г) Теперь: ∃ z находится настолько близко к $z=0$, что $\left|\frac{f(z)}{f(\zeta)}\right|\le q<1$ $\forall \zeta\in C$ (т.к. $f(0)=0$, это всегда можно сделать)
$\Rightarrow$ подынтегр. функц. можно разложить в равномерно сходящийся ряд

$$\frac{\tilde{G}(\zeta)f'(\zeta)}{f(\zeta)}\frac{1}{1-\frac{f(z)}{f(\zeta)}}=\frac{\tilde{G}(\zeta)f'(\zeta)}{f(\zeta)}\left[1+\frac{f(z)}{f(\zeta)}+\frac{f^2(z)}{f^2(\zeta)}+\ldots\right]$$

Подставим этот ряд в $\int$-л; ряд сх-ся равномерно-

$\sum$-ие и $\int$-ование можно поменять местами [16]

$\Rightarrow$ получим: $\tilde{G}(z) = b_0 + b_1 \cdot f(z) + b_2 f^2(z) + \ldots$

(т.к. $f(z)$ выносятся за знак $\int$-ла), где

$$\boxed{b_n := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{G(\zeta) f'(\zeta)}{f^{n+1}(\zeta)} d\zeta} \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

$$= -d\left(\frac{1}{f^n(\zeta)}\right)$$

g) Последний шаг: про$\int$-уем последнее выр-ие по частям:

(при $n > 0$!): $b_n = 0 + \frac{1}{2\pi i n} \int\limits_C \frac{G'(\zeta)}{f^n(\zeta)} d\zeta$

Наконец, учитывая, что, т.к $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, то: под$\int$-ьная ф-ция имеет внутри C особую т. - полюс $\zeta = 0$ пор-ка n $\Rightarrow$ этот $\int$-л можно вычислить, сосчитав вычет в этой т.:

$$\boxed{b_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \to 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{ G'(z) \frac{z^n}{f^n(z)} \right\}, \quad n = 1, 2 \ldots}$$

e) В случае Лагранжа (обращение степенных рядов):

$G(z) = z \Rightarrow G'(z) = 1 \Rightarrow$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \to 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{ \underbrace{\frac{z^n}{f^n(z)}}_{\varphi^n(z)} \right\}, \quad n = 1, 2, \ldots}$$

Как это согласуется с ф-лой Лагранжа полученной ранее? Да дело в том, что для $\forall$ ряда

$$\frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [h(z)] = h_{n-1} = [z^{n-1}]\, h(z) \text{ - коэф-ту при } z^{n-1}$$

в разложении ф-ции $h(z)$ по степеням z $\Rightarrow$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{n} [z^{n-1}]\, \varphi^n(z) = \frac{1}{n} [z^{-1}] \frac{\varphi^n(z)}{z^n} = \frac{1}{n} [z^{-1}] \frac{1}{f^n(z)}$$

где $\varphi(z) = \frac{z}{f(z)}$ - см. рассуждение п. 4). $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{b_n = \frac{1}{n} [x^{-1}] \frac{1}{f^n(x)}} \text{ - Т-ма Лагранжа.}$$