

1. (1) Вычислите площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции  $y = \frac{x^{\alpha/2}}{x^{\alpha+2} + 1}$ ,  $\alpha > -2$ ,  $x \in (0; +\infty)$ .
2. (1) Вычислите площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции  $y = |\sin x|e^{-x}$ ,  $x \in [0; +\infty)$ .
3. (1) Докажите равенство, предполагая, что интеграл сходится

$$\int_0^{+\infty} f\left(x^\alpha + \frac{1}{x^\alpha}\right) \frac{\ln x}{x} dx = 0, \quad \alpha \neq 0.$$

4. (1) При  $\alpha > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  докажите

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) dx = \frac{\alpha^n n!}{(\alpha + 1)^{n+1}}.$$

5. (2) а) Приведите пример непрерывной и неограниченной на любом промежутке  $[a, +\infty)$ ,  $a > 0$ , функции  $f$ , для которой  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  сходится.  
 б) Приведите пример непрерывной неотрицательной и неограниченной на любом промежутке  $[a, +\infty)$ ,  $a > 0$ , функции  $f$ , для которой  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  сходится.

6. (1) Следует ли из сходимости интеграла  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  и из ограниченности функции  $\varphi(x)$  при  $x \in [a; +\infty)$  сходимости интеграла  $\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x) dx$ ?

7. (1) Пусть  $f : [1; +\infty) \rightarrow (e; +\infty)$  монотонно возрастающая функция и  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{f(x)} = +\infty$ . Может ли сходиться интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln f(x) \ln(\ln f(x))}?$$