# Элементарная комбинаторика

## 1 Основные правила перечислительной комбинаторики

**1.** Напомним вначале основные понятия теории множеств.

1.1. *Определение.* Множеством $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ называется совокупность различимых объектов $x_i$, $i = 1, \ldots, n$, объединенных по некоторому признаку.

`Пример:` студенты в аудитории; все студенты различимы, отличны друг от друга и объединены по признаку "собрались в данной аудитории".

Мощностью $|X|$ множества $X$ называется количество элементов в нем. Как правило, мы будем рассматривать конечные множества, в которых $|X| = n$, $n \in \mathbb{N}$, и называть их называть $n$-множествами.

1.2. Основные операции над множествами — объединение, пересечение, разность, дополнение — удобно изучать графически, с использованием т.н. диаграмм Эйлера-Венна. Например, с их помощью достаточно просто проиллюстрировать справедливость законов де Моргана

$$A' \cap B' = (A \cup B)', \qquad\qquad A' \cup B' = (A \cap B)'.$$

1.3. *Определение.* Семейство множеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ называется *покрытием* множества $X$, если их объединение дает нам все множество $X$:

$$X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k = X.$$

Важным частным случаем покрытия является понятие разбиения множества.

*Определение.* Говорят, что семейство множеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ образует *разбиение* множества $X$, если

1. множества $X_i \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots, n$;
2. $X_i \cap X_j = \varnothing \;\; \forall i \neq j$;
3. $X_1 \cup X_2 \bigcup \ldots \cup X_k = X$.

Элементы $X_i$ этого семейства называются *блоками* разбиения.

`Пример:` разбиение студентов курса на группы.

Если важен порядок следования блоков, то говорят об *упорядоченном разбиении.* Например, если мы выводим группы на сцену для вручения им дипломов, то важен порядок, в каком они туда выходят; поэтому в данном случае мы имеем понятие упорядоченного разбиения.

Наконец, еще одним частным случаем покрытия $X$ семейством множеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ является понятие *разделения* множества $X$; это есть аналог упорядоченного разбиения, в котором допускаются пустые блоки. Точное определение таково:

*Определение.* Разделение — это упорядоченное семейство $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$, состоящее из *фиксированного* количества $k$ попарно непересекающихся, и, возможно, пустых множеств, объединение которых дает все $X$.

1.4. *Определение.* Декартовым произведением множеств $A$ и $B$ называется множество

$$A \times B := \{(a,b) \,|\, a \in A,\ b \in B\}$$

всех упорядоченных пар $(a,b)$, таких, что $a \in A$, $b \in B$.

В качестве простейшего примера декартова произведения множеств обычно приводят шахматную доску; любая клетка шахматной доски имеет координаты 'буква-цифра', например, $e5$ или $h4$. Иными словами, координаты клеток шахматной доски являются элементами декартова произведения множеств $A = \{a, b, \ldots, h\}$ и $B = \{1, 2, \ldots, 8\}$.

В частном случае множества $A$ и $B$ могут совпадать; в этом случае декартово произведение $A \times A$ обозначается через $A^{(2)}$.

*Определение.* Декартовым произведением $k$ множеств $X_1, X_2, \ldots, X_k$ называется множество

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k := \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \,|\, x_i \in X_i,\ \forall\ i = 1, \ldots, k\}$$

всевозможных упорядоченных $k$-элементных строк вида $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

В частном случае $X_1 = X_2 = \ldots = X_k = X$ имеем $X \times X \times \ldots \times X =: X^{(k)}$. По сути, любой элемент $X^{(k)}$ есть упорядоченное $k$-множество, в котором некоторые элементы могут повторяться. Если же в таком $k$-множестве порядок элементов не важен, говорят о *$k$-мультимножестве над множеством $X$*.

`Пример:` монеты в кошельке; в этом случае в качестве множества $X$ выступает множество из девяти монет разного достоинства:

$$X = \{1 \text{ копейка, } 5 \text{ копеек, } 10 \text{ копеек, } 50 \text{ копеек, } 1 \text{ рубль, } 2 \text{ рубля, } 5 \text{ рублей, } 10 \text{ рублей}\};$$

любой набор этих монет в количестве $k$ штук образует $k$-мультимножество над этим множеством $X$.

1.5. В комбинаторике для некоторых наиболее важных понятий теории множеств введены следующие специальные понятия:

1. $k$-сочетанием без повторений называется любое $k$-элементное подмножество $n$-множества;
2. $k$-перестановкой без повторений называется упорядоченное $k$-подмножество $n$-множества;
3. $k$-перестановкой с повторениями называется любой элемент декартовой степени $X^{(k)}$;
4. $k$-сочетанием с повторениями называется любое $k$-мультимножество над $n$-множеством.

2. Теперь перейдем к двум самым простым, но в то же время достаточно важным правилам перечислительной комбинаторики — правилу суммы и правилу произведения.

2.1. Начнем с простейшего примера: пусть на одном блюде лежат три яблока, а на втором — две груши; сколькими способами можно выбрать один фрукт? Очевидный ответ: $3 + 2 = 5$-ю способами.

2.2. Простейшее *правило суммы* можно сформулировать так: если некоторый объект из множества $A$ можно выбрать $k$ способами, и, вне зависимости от выбора этого элемента, можно $n$ способами выбрать другой элемент из множества $B$, то выбор объекта из множества $A$ *или* из множества $B$ можно осуществить $k+n$ способами.

2.3. Очевидно, что на языке теории множеств это правило формулируется следующим образом: пусть имеются два непересекающихся множества $A$, $|A|=k$, и $B$, $|B|=n$; тогда

$$|A \cup B| = k + n.$$

2.4. В более общем случае: для любого *разбиения* конечного множества $X$ справедливо равенство

$$|X| = |X_1| + |X_2| + \ldots + |X_k|;$$

это равенство и называется правилом суммы в комбинаторике.

2.5. Под правилом произведения в комбинаторике понимается равенство

$$|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \ldots \cdot |X_k|.$$

Простейший пример на применение этого правила в комбинаторике: пусть в аудитории находятся 32 представителя подгруппы SE, 8 представителей подгруппы CS и 4 представителя подгруппы BI; сколькими способами можно выбрать тройку, состоящую из представителей каждой подгруппы? Очевидно, что $32 \cdot 8 \cdot 4$ способами.

3. Наряду с правилом суммы, в элементарной комбинаторике также достаточно часто используется и несложное его обобщение — так называемый *принцип включения-исключения*. Если правило суммы связано с разбиением множества $X$, то принцип включения-исключения связан с некоторым произвольным покрытием этого $n$-множества семейством множеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$. Сформулируем его вначале для самого простого случая двух множеств, а затем обобщим на случай $n$ множеств.

3.1. Рассмотрим два конечных множества $A$ и $B$, пересечение которых может быть и непусто. Тогда количество элементов в объединении этих множеств, очевидно, равно

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \qquad (1)$$

Действительно, когда мы считаем количество $|A|$ элементов в множестве $A$ и складываем его с количеством $|B|$ элементов в множестве $B$, мы любой элемент, принадлежащий как множеству $A$, так и множеству $B$, считаем дважды. Чтобы этот избыток убрать, нам нужно один раз вычесть количество элементов, содержащихся в пересечении этих двух множеств.

Равенство (1) можно называть обобщенным правилом суммы; оно обобщает правило суммы на случай, когда пересечение двух множеств не пусто.

3.2. Предположим теперь, что $A$ и $B$ являются подмножествами некоторого более широкого множества $X$. В этом случае у любого подмножества $A \subset X$ имеется дополнение к нему — подмножество $A'$, и $A \cap A' = X$. При этом, так как $A \cup A' = \varnothing$, то, согласно правилу суммы, имеет место равенство $|A| + |A'| = |X|$.

Рассмотрим теперь пересечение $A' \cap B'$ дополнений множеств $A$ и $B$. Согласно одной из теорем де Моргана, $A' \cap B' = (A \cup B)'$. Следовательно, количество элементов в этом пересечении с учетом последнего равенства и обобщенного правила суммы (1) можно сосчитать так:

$$|A' \cap B'| = |(A \cup B)'| = |X| - |A \cup B| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

Равенство

$$|A' \cap B'| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|, \tag{2}$$

и называется в комбинаторике принципом включения-исключения.

3.3. Приведем простейший пример его использования. Пусть в аудитории находятся 30 человек, 20 человек из которых знают английский, 12 — французский, а 6 человек знают оба языка. Сколько человек не знает ни один из этих иностранных языков? Ответ, согласно принципу включения-исключения (2), следующий:

$$N = 30 - 20 - 12 + 6 = 4.$$

3.4. Несложно обобщить равенства (1) и (2) на случай большего количества множеств. Так, для трех множеств $A$, $B$, $C$ соответствующие формулы выглядят так:

а) обобщенное правило суммы:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|; \tag{3}$$

б) принцип включения-исключения:

$$|A' \cap B' \cap C'| = |X| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|.$$

`Упражнение 1.` Доказать следующую двойственную к (3) формулу:

$$|A \cap B \cap C| = |A| + |B| + |C| - |A \cup B| - |A \cup C| - |B \cup C| + |A \cup B \cup C|.$$

`Упражнение 2.` Выписать и доказать аналогичные формулы для общего случая $k$ множеств.

## 2 k-сочетания из $n$ элементов. Биномиальные коэффициенты.

1. В качестве первого важного примера на применение описанных в первом параграфе правил сосчитаем количество $k$-сочетаний без повторений; раньше в советской литературе это число обозначалось через $C_n^k$; современное обозначение для этих чисел $\binom{n}{k}$ (читается "из $n$ по $k$").

1.1. Обычно на вопрос, чему равно это число, вспоминают явную формулу

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Однако для расчетов более удобна рекуррентная формула, которая выводится с помощью правила суммы.

1.2. Введем множество $\Sigma_k$ всех $k$-элементных подмножеств $n$-элементного множества $X$. Например, для $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ множество $\Sigma_2=\{\{x_1,x_2\},\{x_1,x_3\},\{x_2,x_3\}\}$. Разобьем $\Sigma_k$ на два блока — блок $\Sigma_k^{(1)}$, $k$-элементные подмножества которого содержат элемент $x_1$, и блок $\Sigma_k^{(2)}$, подмножества которого этот элемент не содержат. Понятно, что это — непустые, непересекающиеся подмножества, объединение которых дает нам все множество $\Sigma_k$. Поэтому по правилу суммы

$$\binom{n}{k}=|\Sigma_k|=|\Sigma_k^{(1)}|+|\Sigma_k^{(2)}|.$$

Осталось сосчитать количество элементов в каждом из блоков $\Sigma_k^{(1)}$, $\Sigma_k^{(2)}$. А это делается довольно легко.

1.3. Действительно, во всех подмножествах первого блока элемент $x_1$ уже выбран, и нам остается выбрать $(k-1)$-элементные подмножества из $(n-1)$-элементного множества $X\backslash x_1$; сделать это можно $\binom{n-1}{k-1}$ способами. Во втором блоке содержатся $k$-элементные подмножества множества $X\backslash x_1$, состоящего из $(n-1)$-го элемента. Их количество, очевидно, равно $\binom{n-1}{k}$. Таким образом окончательно имеем следующее рекуррентное соотношение:

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}, \qquad k\geqslant 1, \quad n\geqslant 1. \tag{4}$$

1.4. Соотношение (4) следует дополнить начальными и граничными условиями. Так как $k$-элементных подмножеств $n$-элементного множества в случае $k>n$ не существует, то

$$\binom{n}{k}=0 \qquad \text{при} \quad k>n.$$

Далее, пустое подмножество можно выбрать всегда и только одним способом; поэтому

$$\binom{n}{0}=1 \qquad \forall\ n\neq 0.$$

Используя эти условия, можно шаг за шагом вычислить коэффициенты $\binom{n}{k}$ и построить так называемый треугольник Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \dots & & & &
\end{array}$$

1.5. Как видно, треугольник Паскаля симметричен, т.е. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$. Комбинаторное доказательство этого факта очевидно: выбирая любое $k$-элементное множество, мы, тем самым, однозначно выбираем и дополнение к нему, т.е. $(n-k)$-элементное множество; следовательно, количество $k$-элементных и $(n-k)$-элементных подмножеств совпадает.

1.6. Наряду с треугольником Паскаля мы будем также активно пользоваться и другим графическим представлением чисел $\binom{n}{k}$. Именно, рассмотрим координатную плоскость $(n,k)$, и в точках с координатами $(n, k)$, $n \geqslant 0$, $k = 0, \ldots, n$ отметим числа $\binom{n}{k}$:

$$
\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{array}
$$

Заметим, что в таком представлении числа $\binom{n}{k}$ можно трактовать как количество различных путей, состоящих из диагональных $(1, 1)$ и вертикальных $(1, 0)$ отрезков, выходящих из начала координат — точки $(0, 0)$, и оканчивающихся в точке с координатами $(n, k)$. Для этого представления рекуррентное соотношение (4) можно трактовать следующим образом: количество путей в точку с координатами $(n, k)$ складывается из количества путей, приходящих в точку с координатами $(n-1, k-1)$, и из количества путей, приходящих в точку с координатами $(n-1, k)$.

2. В качестве следующего применения правила суммы в комбинаторике докажем следующее важное тождество для коэффициентов $\binom{n}{k}$ — формулу суммирования по верхнему индексу:

$$
\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \underbrace{\binom{0}{m} + \binom{1}{m} + \ldots + \binom{m-1}{m}}_{=0} + \binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \ldots + \binom{n}{m} = \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}. \tag{5}
$$

2.1. Для формального доказательства этого тождества применим рекуррентное соотношение (4) к коэффициенту $\binom{k+1}{m+1}$:

$$
\binom{k+1}{m+1} = \binom{k}{m} + \binom{k}{m+1} \qquad \Longrightarrow \qquad \binom{k}{m} = \binom{k+1}{m+1} - \binom{k}{m+1}
$$

Просуммируем теперь полученное равенство по $k$ от $m$ до $n$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} &= \binom{n+1}{m+1} + \sum_{k=m}^{n-1} \binom{k+1}{m+1} - \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m+1} = \\
&= \binom{n+1}{m+1} + \sum_{k=m}^{n-1} \binom{k+1}{m+1} - \sum_{k=m+1}^{n} \binom{k}{m+1} = \\
&= \binom{n+1}{m+1} + \sum_{k'=m+1}^{n} \binom{k'}{m+1} - \sum_{k=m+1}^{n} \binom{k}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}.
\end{aligned}
$$

2.2. Комбинаторное доказательство тождества (5) основано на следующем общем подходе: мы разбиваем множество $\Sigma_{m+1}$ всех $(m+1)$-элементных подмножеств $(n+1)$-элементного множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ на блоки, подсчитываем количество элементов в каждом блоке, а затем пользуемся правилом суммы для подсчета числа $|\Sigma_{m+1}| = \binom{n+1}{m+1}$.

Разбиение множества $\Sigma_{m+1}$ будем проводить следующим образом. В первый блок разбиения мы включим все $(m+1)$-элементные подмножества, содержащие элемент $x_{n+1}$; во второй —

$(m+1)$-элементные подмножества, содержащие $x_n$ и не содержащие $x_{n+1}$; в третий — $(m+1)$-элементные подмножества, содержащие $x_{n-1}$ и не содержащие $x_n$ и $x_{n+1}$ и т.д. В последний блок включим $(m+1)$-элементное подмножество, не содержащее элементов $x_{m+2}, \ldots, x_n, x_{n+1}$, т.е. подмножество $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}\}$.

Число элементов в первом блоке равно $\binom{n}{m}$, во втором — $\binom{n-1}{m}$, в третьем — $\binom{n-2}{m}$, и так далее. В последнем блоке содержится ровно один элемент. Складывая эти коэффициенты, получаем тождество (5).

`Пример.` Пусть $n = 4$, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $m = 2$, $m + 1 = 3$; приведем список всех трехэлементных подмножеств этого множества:

$$\{x_1, x_2, x_3\}, \qquad \{x_1, x_2, x_4\}, \qquad \{x_1, x_2, x_5\}, \qquad \{x_1, x_3, x_4\}, \qquad \{x_1, x_3, x_5\},$$

$$\{x_1, x_4, x_5\}, \qquad \{x_2, x_3, x_4\}, \qquad \{x_2, x_3, x_5\}, \qquad \{x_2, x_4, x_5\}, \qquad \{x_3, x_4, x_5\}.$$

В первый блок разбиения этого множества подмножеств включим подмножества, содержащие элемент $x_5$; таковых имеется $\binom{4}{2} = 6$ штук. Из *оставшегося* списка выберем все подмножества, содержащие $x_4$; их $\binom{3}{2} = 3$ штуки. Наконец, у нас остается единственное подмножество элементов, не содержащих ни $x_4$, ни $x_5$, т.е. подмножество $\{x_1, x_2, x_3, \}$.

3. `Упражнение.` Доказать комбинаторно следующие тождества:

3.1. Формула суммирования по диагонали

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}.$$

3.2. Тождество Вандермонта

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k-i}.$$

4. Коэффициенты $\binom{n}{k}$ часто называют биномиальными коэффициентами. Название это связано с тем, что они, в частности, встречаются в формуле бинома Ньютона

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}. \tag{6}$$

4.1. Комбинаторное доказательство этой формулы довольно элементарно: нужно просто расписать $(x+y)^n$ в виде произведения $n$ сомножителей

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)}_{1} \cdot \underbrace{(x+y)}_{2} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(x+y)}_{n}.$$

После перемножения этих скобок в правой части будут стоять слагаемые вида $x^k y^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Количество таких слагаемых при фиксированном $k$ равно, очевидно, количеству способов выбора $k$ сомножителей $x$ среди $n$ сомножителей, стоящих в правой части. А это количество и есть, по определению, число $\binom{n}{k}$ .

4.2. Формула (6) оказывается чрезвычайно полезной для вывода разного рода соотношений, связанных с биномиальными коэффициентами. Например, полагая в ней $x = y = 1$ , получаем тождество

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Иными словами, мы формально доказали тот факт, что количество *всех* подмножеств данного $n$-множества равно $2^n$ . Комбинаторное доказательство этого факта будет дано в следующем параграфе.

4.3. Далее, полагая в (6) $x = -1$ , $y = 1$ , получаем важное тождество

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

4.4. Наконец, продифференцируем (6) по $x$ :

$$n\,(x+y)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}\, y^{n-k}.$$

Подставляя в это равенство $x = y = 1$ , получим еще одно полезное равенство:

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n\, 2^{n-1}.$$

5. Перейдем теперь к задачам, связанным с подсчетом $k$-сочетаний с повторениями.

5.1. Начнем с примера. Пусть множество $X$ состоит из двух чисел 1 и 2 . Выпишем все 3-сочетания с повторениями из 2-множества $X$ :

$$\{1,1,1\}, \qquad \{1,1,2\}, \qquad \{1,2,2\}, \qquad \{2,2,2\}.$$

Как видно, таковых оказалось 4 штуки. Как подсчитать это количество в общем случае?

5.2. Для решения данной задачи воспользуемся чрезвычайно полезным и часто использующимся в комбинаторике *принципом биекции.* Формально этот принцип можно сформулировать следующим образом: пусть $X$ , $Y$ — пара конечных множеств, и пусть существует биекция $f : X \to Y$ , т.е. такое отображение, что

$$\forall\, y \in Y \qquad \exists!\, x \in X : \qquad y = f(x).$$

Тогда количество элементов в множествах $X$ и $Y$ совпадают: $|X| = |Y| = n$ .

5.3. Неформально использование принципа биекции можно проиллюстрировать на следующем примере. Предположим, что вы устраиваете вечеринку и приглашаете на нее довольно много друзей. Как гостеприимный хозяин, вы встречаете всех своих друзей на входе в дом, но запоминаете только пришедших к вам девушек. В какой-то момент вы решаете подсчитать, сколько парней пришло к вам на вечеринку. Вы знаете количество пришедших к вам девушек, и вам кажется, что количество девушек и парней одинаково. Как вам быстро проверить это предположение? Ответ достаточно очевиден: попросить каждую девушку взять ровно одного парня за руку. Если в результате этой процедуры все множество гостей разбилось на пары, то ваше предположение окажется верным. Тем самым вы сильно упростили себе жизнь — вам не пришлось проделывать довольно утомительную работу по пересчету пришедших к вам парней; вы просто воспользовались для их подсчета результатом уже проделанной работы по пересчету пришедших к вам девушек.

5.4. Вернемся теперь к задаче подсчета всех $k$-сочетаний с повторениями, т.е. всех $k$-мультимножеств над $n$-множеством $X$. Сосчитаем вначале количество таких мультимножеств в случае, когда $n$-множество $X = [n] =: \{1, 2, \ldots, n\}$. Заметим, что любое такое мультимножество может быть записано в следующем виде:

$$1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k \leqslant n.$$

Например, 3-мультимножество $\{1, 1, 2\}$ над 2-множеством $X = \{1, 2\}$ можно записать так:

$$1 \leqslant (a_1 = 1) \leqslant (a_2 = 1) \leqslant (a_3 = 2) \leqslant (n = 2).$$

Теперь превратим в этой цепочке все нестрогие неравенства в строгие. Для этого мы к $a_2$ прибавим единицу, к $a_3$ — двойку, к $a_4$ — тройку, и так далее. К последнему числу $a_n$ мы, таким образом, добавим число $(k-1)$. В результате получим цепочку строгих равенств вида

$$1 \leqslant a_1 < a_2 + 1 < a_3 + 2 < a_4 + 3 < \ldots < a_k + (k-1) \leqslant n + (k-1).$$

В нашем примере

$$1 \leqslant (a_1 = 1) < (a_2 + 1 = 2) < (a_3 + 2 = 4) \leqslant (n + (3-1) = 4).$$

Теперь: зачем нам все это было нужно? Дело в том, что в результате этой операции мы получили некоторое $k$-элементное подмножество *различных* чисел вида $a_i + (i-1)$ множества $\widetilde{X} = [n + k - 1]$ всех чисел от единицы до $n + k - 1$. Иными словами, мы сопоставили любому $k$-мультимножеству над множеством $X = [n]$ вполне определенное $k$-подмножество множества $\widetilde{X} = [n + k - 1]$. Очевидно, что это сопоставление взаимно-однозначно. Но: количество всех $k$-подмножеств данного множества мы знаем — оно равно $\binom{n+k-1}{k}$. Следовательно, этому числу равно, по принципу биекции, и количество всех $k$-мультимножеств над множеством $X = [n]$.

5.5. Количество всех $k$-сочетаний с повторениями над $n$-множеством $X$ обычно обозначается следующим образом: $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$. Мы, таким образом, доказали, что в случае $X = [n]$

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Справедливость этого равенства для произвольного $n$-множества $X$ следует из принципа биекции.

5.6. `Упражнение 1.` Доказать формально и комбинаторно следующее рекуррентное соотношение для количества $k$-сочетаний с повторениями:

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right), \qquad n, k = 1, 2, \ldots$$

$$\left(\!\!\binom{n}{1}\!\!\right) = \binom{n}{1} = n; \qquad \left(\!\!\binom{1}{k}\!\!\right) = \binom{k}{k} = 1.$$

5.7. `Упражнение 2.` Доказать комбинаторно следующее тождество:

$$\left(\!\!\binom{n+1}{k}\!\!\right) = \sum_{i=0}^{k} \left(\!\!\binom{n}{k-i}\!\!\right).$$

С его помощью доказать справедливость равенства

$$\binom{n+k}{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n+k-i-1}{n}.$$

Используя последнее равенство, получить замкнутые выражения для сумм вида

$$\sum_{i=0}^{k} i, \qquad \sum_{i=0}^{k} i^2, \qquad \sum_{i=0}^{k} i^3.$$

# 3 $k$-перестановки из $n$ элементов. Урновые схемы и схемы раскладки предметов по ящикам.

1. Перейдем теперь к подсчету количества $k$-перестановок из $n$ элементов, т.е. к подсчету различных *упорядоченных* наборов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, в которых все $a_i$ принадлежат одному и тому же $n$-элементному множеству $X$.

1.1. Заметим, прежде всего, что в различной литературе встречается довольно много альтернативных названий для данного объекта. Именно, упорядоченный набор $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $a_i \in X$, также иногда называется

– $k$-размещением из $n$ элементов;

– кортежем из $k$ элементов множества $X$;

– упорядоченной $k$-выборкой из $n$ элементов;

– $k$-мерным вектором над множеством $X$;

– $k$-элементным словом над $n$-элементным алфавитом.

1.2. Элементы $a_i$ в наборе $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ могут как повторяться, так и не повторяться. В первом случае говорят о $k$-перестановках с повторениями, во втором — о $k$-перестановках без повторений.

Номер паспорта — это типичный пример $k$-перестановки с повторениями над множеством из десяти цифр $X = \{0, 1, \ldots, 9\}$. Классическим примером $3$-перестановки без повторений является упорядоченный список спортсменов, занявших призовые места в любых спортивных соревнованиях.

1.3. **Утверждение 1.** Количество $k$-перестановок с повторениями из $n$ элементов равно $n^k$.

Для доказательства можно либо просто сослаться на правило произведения, либо рассмотреть $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $a_i \in X$ как слово из $k$ элементов над алфавитом из $n = |X|$ букв. На первое место в слове я могу выбрать любую из $n$ букв, на второе — также любую из $n$ букв и так далее. Всего же имеем $n^k$ вариантов записать это слово.

1.4. В качестве важного приложения доказанного выше результата сосчитаем еще раз, на этот раз комбинаторно, количество подмножеств данного множества $X$. Для этого воспользуемся принципом биекции, а именно, закодируем любое подмножество $A$ $n$-множества $X$ строкой $f(A)$ длины $n$ из нулей и единиц. Единицу на $i$-м месте поставим в случае, если элемент $x_i \in A$; в противном случае мы на $i$-м месте поставим ноль.

`Пример.` Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $A = \{x_2, x_4\}$. Тогда соответствующая подмножеству $A$ строка длины 4 записывается следующим образом:

$$f(A) = (0, 1, 0, 1).$$

Очевидно, что построенное отображение $f$ взаимно-однозначно. Следовательно, количество подмножеств данного $n$-множества $X$ совпадает с количеством строк длины $n$ над алфавитом из двух цифр $\{0, 1\}$, которое, согласно доказанному выше утверждению 1, равно $2^n$.

1.5. **Утверждение 2.** Количество $P(n, k)$ $k$-перестановок из $n$ элементов без повторений равно

$$P(n, k) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) =: (n)_k.$$

Доказательство очевидно — на первое место в строке длины $k$ я могу поставить любой из $n$ элементов, на второе — любой из оставшихся $(n-1)$ элементов и так далее.

`Упражнение.` Доказать формально и комбинаторно следующие рекуррентные соотношения для чисел $P(n, k)$:

$$P(n, k) = P(n-1, k) + k\, P(n-1, k-1), \qquad n \leqslant 1, \quad k = 1, \ldots, n;$$

$$P(n, 0) = 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \qquad P(n, k) = 0, \quad k > n.$$

1.6. В частном случае $k = n$ $k$-перестановки из $n$ элементов без повторений называются просто перестановками $n$-элементного множества $X$. Их количество равно

$$P_n \equiv P(n) = n!, \qquad P(0) = 0! = 1.$$

1.7. Любую $k$-перестановку из $n$ элементов без повторений можно рассматривать и как упорядоченное $k$-подмножество $n$-множества. Мы знаем, что количество всех $k$-подмножеств $n$-множества равно $\binom{n}{k}$, а количество способов упорядочить $k$-подмножество равно количеству перестановок этих $k$ элементов, т.е. $k!$. Следовательно, числа $(n)_k$ и $\binom{n}{k}$ связаны соотношением

$$(n)_k = k! \cdot \binom{n}{k} \qquad \Longrightarrow \qquad \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}.$$

Последняя формула часто используется как некомбинаторное определение биномиальных коэффициентов $\binom{n}{k}$ в случае, когда $n \neq \mathbb{N}$, а принадлежит $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ или даже $\mathbb{C}$. Именно, по определению,

$$\binom{q}{k} := \begin{cases} \dfrac{q\,(q-1)\,\ldots\,(q-k+1)}{k\,(k-1)\,\ldots\,1}, & \text{если } k \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{если } k = 0, \end{cases} \qquad \forall\, q \in \mathbb{C}.$$

Например,

$$\binom{-1}{3} = \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}{3\cdot 2\cdot 1} = -1.$$

2. Практически все задачи элементарной комбинаторики, связанные с подсчетом количества $k$-сочетаний и $k$-перестановок, могут быть сведены к одной из двух простейших схем — либо к так называемой урновой схеме, либо к схеме раскладки предметов по ящикам.

2.1. В урновой схеме имеется урна, в которой находятся $n$ *различимых* предметов. Из урны последовательно вытаскивается $k$ предметов. Задача состоит в подсчете количества различных способов выбора этих предметов, или, как еще говорят, в подсчете различных $k$-элементных выборок из $n$ предметов, находящихся в урне.

На практике наиболее часто встречаются четыре модификации этой задачи, различающиеся способами формирования $k$-элементной выборки. Во-первых, мы можем разрешить возвращать вытаскиваемые предметы обратно в урну. В этом случае говорят о *выборке с повторениями.* В противном случае имеем *выборку без повторений.* Во-вторых, выборки могут быть *упорядоченными* или *неупорядоченными* в зависимости от того, важен нам или не важен порядок вытаскиваемых предметов.

Нетрудно убедиться в том, что все эти четыре задачи представляют собой некоторые (иногда более удобные на практике) переформулировки уже разобранных выше задач о подсчете количества $k$-сочетаний или $k$-повторений $n$-элементного множества. Решения этих задач можно записать в виде следующей таблицы:

| Предметы на выходе: | с возвращением | без возвращения |
|---|---|---|
| упорядоченные | $n^k$ | $(n)_k$ |
| неупорядоченные | $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ | $\binom{n}{k}$ |

2.2. Второй, не менее популярной в элементарной комбинаторике схемой, связанной с подсчетом количества $k$-перестановок и $k$-сочетаний, является схема раскладки предметов по ящикам. В этой схеме имеется $n$ *различимых* ящиков, по которым нужно разложить $k$ различимых или неразличимых предметов. Количество предметов в каждом ящике также может быть различно и определяться из условий конкретной задачи. Таким образом, как и в случае урновой схемы, в данной задаче имеются несколько различных подзадач, связанных с подсчетом количества $k$-перестановок и $k$-сочетаний. Целью оставшейся части данного параграфа является подробный анализ каждой из таких подзадач, а также сравнение этих подзадач с аналогичными подзадачами для урновых схем.

3. Начнем с задач, связанных с подсчетом количества различных $k$-перестановок из $n$ предметов с повторениями.

3.1. `Пример.` Сколькими способами можно разложить по двум *различимым* карманам (например, левому и правому) девять монет *различного* достоинства?

Ответ достаточно очевиден — это можно сделать $2^9$ способами. Действительно, любую из девяти различных монет я могу положить либо в левый, либо в правый карман. Следовательно, по правилу произведения имеется

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{9} = 2^9$$

различных способов раскладки.

3.2. Рассмотренный пример является типичной задачей, связанной с подсчетом количества различных $k$-сочетаний из $n$ элементов с повторениями, которая естественным образом сводится к схеме раскладки предметов по ящикам. В задачах такого рода имеется $n$ различимых ящиков и $k$ различимых же предметов; требуется подсчитать количество способов раскладки этих предметов по ящикам при условии, что в любой ящик можно класть любое количество предметов (в частности, не положить ни один предмет). Количество способов совершить эти действия равно, очевидно, $n^k$. Доказательство этого факта производится абсолютно аналогично тому, как это было сделано в приведенном выше примере.

3.3. Рассмотренная в п.3.1 задача, однако, не всегда решается верно: в качестве ответа иногда выдают $9^2$ способов. Путаница, как правило, происходит потому, что эту задачу пытаются свести к урновой схеме, считая, что имеются урна, в которой расположены $9$ различных предметов, и $2$ различимые позиции на выходе.

Для того, чтобы этой путаницы избежать, полезно сформулировать следующие основные отличия схемы раскладки по ящикам от соответствующей ей урновой схемы: в схеме раскладки предметов по ящикам

1. предметы обратно не возвращаются, они остаются в ящике;
2. в любой ящик можно класть любое количество предметов; в аналогичной урновой схеме на любую позицию можно помещать ровно один предмет.

Полезно также отметить, что к урновым схемам в данном случае, как правило, относятся задачи, которые сводятся к перечислению $k$-элементных слов над $n$-элементным алфавитом.

3.4. `Упражнение 1.` На перекрестке имеется 6 светофоров. Сколько существует различных состояний этих светофоров, если каждый из них независимо от других имеет три возможных состояния — горит красный, горит желтый или горит зеленый?

3.5. `Упражнение 2.` В купе поезда едет 6 человек. Поезд делает 5 остановок. Сколькими способами пассажиры могут распределиться между этими остановками?

4. Сформулируем теперь схему раскладки предметов по ящикам, связанную с подсчетом количества $k$-перестановок из $n$ элементов без повторений.

4.1. В этой схеме по-прежнему имеется $n$ различимых ящиков и $k$ различимых предметов. Требуется сосчитать количество различных способов раскладки этих предметов по ящикам при условии, что в любом ящике может находиться *не более одного* предмета (т.е. $0$ или $1$ предмет).

4.2. И в этой задаче ответ практически очевиден: $0$ способов в случае $k > n$, и $(n)_k$ способов при $0 \leqslant k \leqslant n$. Действительно, в последнем случае первый предмет я могу разместить в любом из $n$ ящиков, второй — в любом из оставшихся $(n-1)$ ящиков и так далее.

4.3. Сформулируем в заключение отличия этой схемы от соответствующей ей урновой схемы:

1. в урновой схеме на входе задачи имеется $n$ предметов в урне и $k$ незанятых позиций вне ее; на выходе задачи в урне остается $n-k$ предметов, а вне ее — $k$ предметов, расположенных на $k$ различных позициях;

2. в схеме раскладки по ящикам на входе задачи имеется $k$ различных предметов и $n$ различных пустых ящиков; на выходе задачи все $k$ предметов распределены ровно по $k$ ящикам, и имеются еще $(n-k)$ пустых ящиков.

5. Перейдем теперь к схемам раскладки по ящикам, связанным с подсчетом количества $k$-сочетаний. Начнем с задач, связанных с подсчетом количества $k$-сочетаний из $n$ элементов без повторений, т.е. с подсчетом $k$-элементных подмножеств $n$-элементного множества.

5.1. На языке раскладки предметов по ящикам задача подсчета количества $k$-сочетаний из $n$ элементов без повторений формулируется следующим образом. Имеются $n$ различимых ящиков и $k$ неразличимых предметов. Требуется подсчитать количество различных способов раскладки этих предметов по ящикам при условии, что в каждом ящике может находиться не более одного предмета.

Почему же это есть задача о подсчете количества $k$-подмножеств $n$-элементного множества? Да потому, что в данной задаче в качестве $n$-элементного множества выступает множество, состоящее из $n$ различимых ящиков. Мы выбираем из него некоторое $k$-элементное подмножество, размещая в каких-то $k$ ящиках по одному (неразличимому) предмету. Эти предметы, по сути, выступают метками, которыми мы помечаем $k$ из $n$ различимых ящиков. Количество способов это сделать равно, очевидно, количеству различных $k$-элементных подмножеств $n$-множества, т.е. $\binom{n}{k}$.

5.2. Приведем некоторые наиболее характерные примеры использования этой схемы.

`Пример 1.` У отца имеется 5 (неразличимых) апельсинов, которые он может раздать восьми своим сыновьям. Если его задача состоит в том, чтобы раздать их максимальному количеству сыновей, то он должен поставить дополнительное условие — любой из его сыновей не должен получить более одного апельсина. В этом случае количество способов, которыми он может раздать своим сыновьям эти пять апельсинов, равно, очевидно, $\binom{8}{5}$.

`Пример 2.` В физике встречаются задачи, в которых имеются $n$ различных уровней энергии и $k$ неразличимых элементарных частиц. Если эти частицы — фермионы, то для них действует так называемый принцип запрета Паули, согласно которому на любом энергетическом уровне может находиться не более одной элементарной частицы. Как следствие, количество различных распределений $k$ фермионов по $n$ энергетическим уровням равно $\binom{n}{k}$.

5.3. *Замечание.* Отличия схемы раскладки по ящикам от урновой схемы для задачи подсчета количества $k$-сочетаний из $n$ элементов без повторений аналогичны тем, что были сформулированы для задачи подсчета количества $k$-перестановок из $n$ элементов без повторений. Именно, в урновой схеме имеется $n$ различимых предметов, из которых выбирается $k$ предметов на $k$ неразличимых позиций. В схеме раскладки по ящикам имеется $n$ различимых ящиков (позиций), по $k$ из которых раскладываются $k$ неразличимых предметов.

6. Наконец, перейдем к схеме раскладки по ящикам, связанной с подсчетом количества $k$-сочетаний из $n$ элементов с повторениями, т.е. с подсчетом $k$-мультимножеств над $n$-элементным множеством.

6.1. В этой схеме также имеются $n$ различимых ящиков и $k$ неразличимых предметов. Требуется определить количество способов раскладки предметов по ящикам при отсутствии каких-либо ограничений на количество предметов в одном ящике.

Очевидно, что если в качестве $n$-элементного множества $X$ выбрать множество $n$ различимых ящиков, то любая раскладка $k$ неразличимых предметов по этим ящикам будет задавать некоторое $k$-мультимножество $n$-множества $X$. Следовательно, количество различных способов раскладки равно в этом случае $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.

6.2. Приведем несколько характерных примеров.

`Пример 1.` У отца по-прежнему имеется пять (неразличимых для него) апельсинов, которые он хочет раздать восьмерым своим сыновьям. Однако теперь он раздает их по каким-то там заслугам, и может, таким образом, любому сыну отдать любое количество апельсинов. В этом случае количество способов это сделать равно $\left(\!\binom{8}{5}\!\right) = \binom{12}{5}$.

`Пример 2.` В задачах о распределении $k$ неразличимых элементарных частиц по $n$ различимым уровням энергии наряду с фермионами существуют частицы (бозоны), для которых не существует ограничений на количество частиц, занимающих один и тот же уровень энергии. Для бозонов количество таких распределений равно, очевидно, $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.

6.3. Достаточно часто на практике встречаются ситуации, когда одну и ту же задачу можно свести и к урновой схеме, и к схеме раскладки предметов по ящикам.

`Пример.` В кондитерском магазине продаются пирожные трех разных видов. Сколькими различными способами можно купить семь пирожных? Ответ в этой задаче, очевидно, равен $\left(\!\binom{3}{7}\!\right) = \binom{9}{7}$. Этот ответ можно, например, получить, представляя себе коробку с тремя отделениями, в каждое из которых кладется пирожное только одного вида; в этом случае мы сводим задачу к подсчету количества раскладок семи неразличимых предметов по трем различимым ящикам. Другой способ получить тот же ответ — это представлять себе урну, в которой находятся три разных пирожных, и считать количество способов выбора из урны семи пирожных с возвращениями любого выбранного пирожного обратно в урну. Наконец, можно вообще забыть о любых схемах, если понимать, что любые семь купленных пирожных трех различных видов представляют собой $7$-мультимножество над $3$-элементным множеством различимых пирожных.

6.4. `Упражнение.` Сосчитать количество способов раскладки $k$ неразличимых предметов по $n$ различимым ящикам при условии, что в каждом ящике должен находиться как минимум один предмет.

7. К задачам раскладки неразличимых предметов по различимым ящикам, связанным с подсчетом количества $k$-сочетаний, сводятся задачи о так называемом *разбиении* натурального числа $k$ на $n$ слагаемых.

7.1. Задача о разбиении числа $k$ на $n$ слагаемых формулируется следующим образом: сколькими способами можно представить натуральное число $k$ в виде суммы $n$ слагаемых вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k$$

при условии, что порядок слагаемых важен, т.е. при условии, что разбиения вида

$$1+3+3+3=10 \qquad\qquad \text{и} \qquad\qquad 3+1+3+3=10$$

считаются различными?

7.2. Если на числа $a_i$ накладывается единственное условие вида $a_i \geqslant 0$, то количество разбиений равно количеству $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ $k$-мультимножеств над $n$-элементным множеством. Действительно, в упорядоченной сумме $a_1+a_2+\ldots+a_n$ любой индекс $i$ слагаемого $a_i$ можно рассматривать как $i$-й ящик, в который мы складываем $a_i$ единиц. Следовательно, эту задачу можно трактовать как задачу о раскладке $k$ "неразличимых"единиц по $n$ различимым ящикам.

7.3. `Пример.` Подсчитать количество разбиений числа $k=4$ на два слагаемых:

$$a_1+a_2=4, \qquad a_1, a_2 \geqslant 0.$$

Ответ: $\left(\!\binom{2}{4}\!\right)=\binom{5}{4}=5$ разбиений; перечислим их:

$$0+4=1+3=2+2=3+1=4+0=4.$$

7.4. К подсчету числа $k$-сочетаний из $n$ элементов без повторений задача о разбиении числа $k$ сводится в случае, когда на числа $a_i$ накладываются следующие условия:

$$a_i=0 \qquad \text{или} \qquad a_i=1.$$

В этом случае индекс $i$ также можно трактовать как $i$-й ящик; его можно выбрать (положив $a_i=1$) или не выбрать (положив $a_i=0$). Всего же нужно выбрать $k$ таких ящиков. Это можно сделать $\binom{n}{k}$ способами.

7.5. `Пример.` Подсчитать количество разбиений числа $2$ на три слагаемых при условии, что любое слагаемое может принимать значения $0$ или $1$. Ответ: $\binom{3}{2}=3$ способа вида

$$1+1+0=1+0+1=0+1+1=2.$$

7.6. `Упражнение.` Подсчитать количество разбиений числа $k$ при ограничениях

$$a_i \geqslant s_i, \quad i=1,\ldots,n; \qquad\qquad s_1+s_2+\ldots+s_n=: s \leqslant k.$$

# 4 Подсчет количества отображений конечных множеств

1. Оказывается, задачи о раскладке различимых предметов по различимым же ящикам имеют и еще одну, чрезвычайно важную комбинаторную интерпретацию — они эквивалентны задачам о подсчете количества отображений конечных множеств.

1.1. *Определение.* Пусть $X$, $Y$ — пара конечных множеств. Отображением $f$ из $X$ в $Y$ называется правило, согласно которому любому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$:

$$\forall\, x \in X \qquad \exists!\, y \in Y: \qquad y=f(x).$$

1.2. С комбинаторной точки зрения любое отображение $f$ из $n$-элементного множества $X$ в $k$-элементное множество $Y$ можно рассматривать как некоторый вариант раскладки $n$ различимых предметов по $k$ различимым ящиками при отсутствии каких-либо ограничений на количество предметов в каждом ящике.

`Пример.` Рассмотрим отображение $f$ из трехэлементного множества $X$ в четырехэлементное множество $Y$ вида

$$f(x_1) = y_2, \qquad f(x_2) = y_2, \qquad f(x_3) = y_4.$$

Этому отображению отвечает раскладка трех различимых предметов по четырем различимым ящикам, при которой первые два предмета размещаются во втором ящике, а третий предмет — в четвертом ящике.

Как следствие, общее количество всех отображений $n$-элементного множества $X$ в $k$-элементное множество $Y$ равно $k^n$.

1.3. Вспомним теперь определение *инъективного* отображения.

*Определение.* Отображение $f : X \to Y$ называется инъективным, если из условия

$$f(x_1) = f(x_2) \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = x_2.$$

Иными словами, отображение называется инъективным, если у любого образа (элемента $y \in Y$) имеется не более одного прообраза, т.е. элемента $x \in X$, такого, что $y = f(x)$.

1.4. Понятно, что любому инъективному отображению $f : X \to Y$ отвечает такая раскладка $n$ элементов множества $X$, при которой в каждом из $k$ ящиков находится не более одного элемента. Как следствие, количество всевозможных инъективных отображений равно $(k)_n$.

1.5. *Определение.* Отображение $f : X \to Y$ называется *биективным,* если

$$\forall\, y \in Y \qquad \exists!\, x \in X : \qquad y = f(x).$$

Количество таких отображений равно, очевидно, $n!$, где $n = |X| = |Y|$.

1.6. *Определение.* Отображение $f : X \to Y$ называется сюръективным, если

$$\forall\, y \in Y \qquad \exists\, x \in X : \qquad y = f(x).$$

Другими словами, отображение сюръективно, если каждый образ $y \in Y$ имеет хотя бы один прообраз $x \in X$.

Комбинаторная интерпретация сюръективного отображения такова: это есть некоторая раскладка $n$ различимых предметов по $k$ различимым ящикам при условии, что в каждом ящике находится хотя бы один предмет. Количество таких раскладок при $k > n$ равно, очевидно, нулю. Задача следующего пункта данного параграфа — сосчитать количество этих раскладок для случая $0 \leqslant k \leqslant n$.

2. Обозначим через $\widehat{S}(n,k)$ количество всех сюръективных отображений $n$-элементного множества $X$ в $k$-элементное множество $Y$. Сосчитаем $\widehat{S}(n,k)$ для случая $n \geqslant 0$, $0 \leqslant k \leqslant n$.

2.1. Рассмотрим множество *всех* отображений из $n$-множества $X$ в $k$-множество $Y$. Как мы знаем, количество таких отображений равно $k^n$. Наша задача состоит в том, чтобы подсчитать это количество по-другому, выразив $k^n$ через числа $\widehat{S}(n,k)$.

2.2. Заметим, что *любое* отображение $f : X \to Y$ можно рассматривать как *сюръективное* отображение множества $X$ на множество

$$\mathfrak{I}(f) = \{y \in Y \mid \exists x : \ y = f(x)\},$$

являющееся образом множества $X$ при отображении $f$.

2.3. `Пример.` Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, а отображение $f : X \to Y$ задается так:

$$f(x_1) = y_2, \qquad\qquad f(x_2) = f(x_3) = y_3.$$

В этом случае $\mathfrak{I}(f) = \{y_2, y_3\}$, а отображение $f : X \to Y$ является сюръективным отображением множества $X$ на подмножество $\mathfrak{I}(f) \subset Y$.

2.4. Разобъем теперь все множество отображений $f : X \to Y$ на блоки, включив в $i$-й блок все отображения, образ $\mathfrak{I}(f)$ которых содержит ровно $i$ элементов: $\mathfrak{I}(f) = i$, $i = 1, \ldots, k$. Все, что нам остается — это сосчитать количество элементов в каждом блоке, а затем воспользоваться правилом суммы для того, чтобы получить общее количество $k^n$ всех отображений.

2.5. Заметим, что существует $\binom{k}{i}$ способов выбрать $i$-элементное подмножество $k$-множества $Y$. Для каждого из этих подмножеств имеется $\widehat{S}(n,i)$ различных сюръективных отображений из $n$-элементного множества $X$ в выбранное $i$-элементное подмножество множества $Y$. Таким образом, по правилу произведения, общее количество элементов в $i$-м блоке равно

$$\binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i).$$

Тогда по правилу суммы можем записать, что

$$k^n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i). \tag{7}$$

2.6. Мы выразили количество всех отображений $n$-элементного множества $X$ в $k$-элементное множество $Y$ через количество $\widehat{S}(n,i)$ сюръективных отображений. Нам же нужна обратная формула, выражающая количество $\widehat{S}(n,k)$ сюръективных отображений через число $i^n$ всех отображений. Для ее получения воспользуемся так называемыми *формулами обращения.*

`Упражнение.` Пусть $(f_0, f_1, f_2, \ldots)$ и $(g_0, g_1, g_2, \ldots)$ — две числовые последовательности, и пусть одна из них выражается через вторую по формулам

$$f_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g_i, \qquad k \geqslant 0. \tag{8}$$

Доказать, что для таких последовательностей справедлива следующая формула обращения:

$$g_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_i, \qquad k \geqslant 0. \tag{9}$$

2.7. С учетом этих формул обращения можно, считая $n$ параметром, из соотношения (7) получить следующую явную формулу для вычисления чисел $\widehat{S}(n,k)$:

$$\widehat{S}(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \cdot i^n. \tag{10}$$

2.8. `Упражнение.` Вывести формулу (10) с помощью принципа включения-исключения.

2.9. *Замечание.* Формулу (7) полезно иногда записывать и в виде

$$k^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i), \tag{11}$$

причем эта формула справедлива как для случая $n \geqslant k$, так и для случая $n < k$. Действительно, в случае $n \geqslant k$ имеем

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i) + \sum_{i=k+1}^{n} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i)$$

за счет того, что биномиальные коэффициенты $\binom{k}{i} = 0$ для всех $i > k$. В случае же $n < k$

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i) + \sum_{i=n+1}^{k} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i)$$

уже за счет того, что при $i > n$ все числа $\widehat{S}(n,i) = 0$.

# 5 Подсчет количества разделений и упорядоченных разбиений $n$-элементного множества. Перестановки с повторениями

1. Задачи подсчета количества отображений $n$-элементного множества $X$ в $k$-элементное множество $Y$ имеют еще одну важную комбинаторную интерпретацию.

1.1. Начнем с примера. Для трехэлементного множества $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и двухэлементного множества $Y = \{y_1, y_2\}$ имеется, как мы знаем, $2^3 = 8$ различных отображений множества $X$ в множество $Y$. Запишем все эти отображения как упорядоченные пары вида

$$\begin{array}{cccc} (\{x_1,x_2,x_3\},\varnothing), & (\{x_1,x_2\},\{x_3\}), & (\{x_1,x_3\},\{x_2\}), & (\{x_2,x_3\},\{x_1\}), \\ (\{x_1\},\{x_2,x_3\}), & (\{x_2\},\{x_1,x_3\}), & (\{x_3\},\{x_1,x_2\}), & (\varnothing,\{x_1,x_2,x_3\}). \end{array}$$

Видно, что записанное в таком виде решение представляет собой не что иное, как список всех возможных *разделений* множества $X$ на два (возможно пустых) блока.

1.2. Очевидно, что данный результат справедлив и в общем случае. Именно, любое отображение $f : X \to Y$ задает нам некоторое разделение множества $X$ на $k$ упорядоченных блоков, среди которых могут быть и пустые. Как следствие, количество таких разделений совпадает с количеством всех отображений $f$ и равно $k^n$.

1.3. Аналогичные рассуждения показывают, что любое сюръективное отображение $f : X \to Y$ задает нам некоторое *упорядоченное разбиение* множества $X$ на блоки. Поэтому количество всех упорядоченных разбиений $n$-элементного множества $X$ на $k$ блоков равно числу $\widehat{S}(n,k)$.

2. Рассмотрим теперь некоторый специальный вид $k$-разделений множества $X$, а именно, такие $k$-разбиения, в которых в первом блоке содержится $a_1$ элемент, во втором блоке — $a_2$ элемента,

в $k$-м блоке — $a_k$ элементов. Очевидно, что при этом общая сумма всех элементов должна быть равна мощности $|X| = n$:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n, \qquad a_i \geqslant 0.$$

2.1. **Утверждение.** Количество всех таких $k$-разделений $n$-множества $X$ равно

$$\binom{n}{a_1} \cdot \binom{n-a_1}{a_2} \cdot \ldots \cdot \binom{n-a_1-a_2-\ldots-a_{k-1}}{a_k}. \tag{12}$$

Действительно, в любом $k$-разделении $n$-множества $X$ элементы, принадлежащие первому блоку $X_1$, $|X_1| = a_1$, могут быть выбраны $\binom{n}{a_1}$ способами. После выбора этих $a_1$ элементов элементы второго блока $X_2$, $|X_2| = a_2$ можно выбрать $\binom{n-a_1}{a_2}$ способами и так далее. Формула (12) теперь следует из правила произведения.

2.2. `Упражнение.` С использованием явной формулы для биномиальных коэффициентов

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

показать, что

$$\binom{n}{a_1} \cdot \binom{n-a_1}{a_2} \cdot \ldots \cdot \binom{n-a_1-a_2-\ldots-a_{k-1}}{a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_k!} := P(n; a_1, a_2, \ldots, a_k).$$

2.3. Как уже отмечалось, общее количество всех $k$-разделений $n$-множества $X$ равно $k^n$. Следовательно, суммирование чисел $P(n; a_1, a_2, \ldots, a_k)$ по всем возможным $a_i$ дает нам следующее полезное для дальнейшего соотношение:

$$k^n = \sum_{\substack{a_1+a_2+\ldots+a_k=n \\ a_i \geqslant 0}} \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_k!}. \tag{13}$$

2.4. Если в условии рассматриваемой задачи заменить нестрогие неравенства $a_i \geqslant 0$ на строгие, т.е. на неравенства $a_i > 0$, то вместо разделения мы получим упорядоченное разбиение специального вида. Количество таких упорядоченных разбиений также описывается формулой (12), а вместо формулы (13) получается не менее полезное соотношение вида

$$\widehat{S}(n,k) = \sum_{\substack{a_1+a_2+\ldots+a_k=n \\ a_i > 0}} \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_k!}. \tag{14}$$

3. Числа $P(n; a_1, a_2, \ldots, a_k)$ имеют и другой комбинаторный смысл; именно, они перечисляют так называемые *перестановки* $n$*-множества* $X$ *с повторениями.*

3.1. Рассмотрим следующую задачу: на полке имеются 15 различных книг по математике, 16 по информатике и 12 по физике; каково количество способов перестановки этих книг на полке? Ответ очевиден: $(15+16+12)! = 43!$ способов.

3.2. Предположим теперь, что мы перестали различать книги, посвященные одному и тому же предмету. В этом случае количество различных способов перестановки таких книг уменьшится.

Обозначим это количество через $P(43; 15, 16, 12)$. Так как существует $15!$ способов упорядочить книги по математике, $16!$ – по информатике и $12!$ – по физике, то по правилу произведения мы можем записать, что

$$43! = P(43; 15, 16, 12) \cdot 16! \cdot 15! \cdot 12! \qquad \Longrightarrow \qquad P(43; 15, 16, 12) = \frac{43!}{16! \cdot 15! \cdot 12!}.$$

Это число и называется числом перестановок множества $X$, $|X| = 43$, с повторениями.

3.3. В общем случае, когда среди $n$ предметов имеется $a_1$ неразличимых предметов первого сорта, $a_2$ неразличимых предметов второго сорта и так далее, мы для количества перестановок таких предметов с повторениями получаем уже знакомую нам формулу

$$P(n; a_1, a_2, \ldots, a_k) = \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_k!}.$$