Элементарная комбинаторика

1 Принцип Дирихле

1.1. Начнем мы данную главу с изложения очень простого принципа, который, однако, является весьма эффективным способом решения многих комбинаторных задач — принципа Дирихле (или в английском варианте — Pigeon-Hole Principle).

1.1.1. В своей простейшей формулировке он гласит следующее:

Утверждение 1.1. *Если в n ящиков положить $k > n$ предметов (в n клеток посадить $k > n$ голубей), то хотя бы в одном ящике будут лежать по крайней мере два предмета (будут сидеть по крайней мере два голубя).*

Доказательство. Несмотря на всю очевидность данного утверждения, все же дадим его формальное доказательство. Предположим, что утверждение неверно, то есть в каждом ящике находится не более одного предмета. Обозначим через m количество ящиков, в котором ничего не лежит. Очевидно, что $m \geqslant 0$. Тогда ровно по одному предмету лежит в $(n-m)$ ящиках. Это означает, собственно, что общее количество предметов равно $n - m \leqslant n < k$, что противоречит условию нашего утверждения. □

1.1.2. На первый взгляд совершенно непонятно, как такой настолько простой принцип может использоваться при решении каких-либо серьезных задач, ведь он кажется совершенно очевидным. Однако оказывается, что в конкретных задачах, использующих в своих решениях данный принцип, зачастую очень нелегко понять, где предметы, где ящики, и почему предметов больше, чем ящиков. Далее, далеко не всегда по формулировке самой задачи можно догадаться, что для ее решения следует воспользоваться данным принципом. И наконец, данный принцип дает нам неконструктивное доказательство какого-то факта — используя его, мы не можем сказать, в каком конкретно ящике находятся два предмета, мы знаем лишь, что такой ящик существует. Попытка же дать конструктивное доказательство, то есть попытка нахождения данного ящика, часто связана с очень большими трудностями. Тем не менее, данный принцип очень полезен, и с его помощью можно доказывать совершенно неочевидные на первый взгляд результаты.

1.1.3. Приведем вначале простейший пример на применение данного принципа.

Пример 1.2. Доказать, что в наборе из любого $(n+1)$-го положительного целого числа найдутся по крайней мере два числа, имеющих один и тот же остаток от деления на n.

Доказательство. Действительно, рассмотрим произвольный набор $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ положительных целых чисел. Поделив их с остатком на n, мы получим набор $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, r_{n+1}\}$ из $(n+1)$-го остатка от этого деления — набор неотрицательных целых чисел, каждое из которых меньше n. Но мы знаем, что имеется только лишь n неотрицательных целых чисел, меньших n. Следовательно, по принципу Дирихле, хотя бы два остатка из полученного набора должны совпадать. □

1.1.4. Обычно в качестве примера применения принципа Дирихле дается чуть более сложная формулировка того же самого утверждения.

Пример 1.3. Доказать, что в последовательности чисел

$$7,\ 77,\ 777\ \ldots$$

один из первых 2014 членов данной последовательности делится на 2013.

Решение. Вначале ход рассуждений полностью повторяет рассуждения предыдущего примера. Именно, поделив с остатком первые 2014 членов выбранной числовой последовательности на 2013, мы получим 2014 остатков, значение каждого из которых меньше 2013. Следовательно, согласно принципу Дирихле существуют хотя бы два различных числа с одинаковыми остатками. Обозначим эти числа через a_i и a_j, и пусть для определенности $i < j$. Тогда

$$a_i = 2013 \cdot q_i + r, \qquad a_j = 2013 \cdot q_j + r,$$

а число $(a_j - a_i)$ делится без остатка на число 2013. Покажем теперь, что число a_{j-i} делится без остатка на 2013.

Действительно,

$$\begin{array}{rc} 7777777777777777777777777 & j \text{ цифр} \\ -7777777777777777 & i \text{ цифр} \\ = 7777777770000000000000000 & \begin{array}{c} j-i \text{ цифр, равных } 7, \\ i \text{ цифр, равных } 0, \end{array} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad a_j - a_i = a_{j-i} \cdot 10^i.$$

Но 10^i и 2013 взаимно просты, поэтому a_{j-i} делится на 2013.

1.1.5. Рассмотрим еще один характерный пример.

Пример 1.4. Доказать, что среди нескольких находящихся в одной комнате человек хотя бы двое имеют одинаковое количество знакомых среди присутствующих в комнате.

Доказательство. Пусть в комнате находится n человек. Тогда для любого из них количество k с ним знакомых может принимать значения от нуля (ни с кем не знаком) до $n-1$ (со всеми знаком). Но отношение знакомства является взаимным: если a знаком с b, то и b знаком с a. Поэтому, к примеру, невозможен случай, когда в одной комнате имеются одновременно человек, у которого $(n-1)$ знакомых, и человек, у которого 0 знакомых: в первом случае у второго человека не может быть 0 знакомых, а во втором — у первого не может быть $(n-1)$ знакомый. Тем самым мы исключили вариант, когда у каждого находящегося в комнате свое, отличное от других, число знакомых. Иными словами, хотя бы для одного значения $k \in [0, n-1]$ в комнате нет человека с k знакомыми, и количество различных значений для k меньше числа n. Следовательно, согласно принципу Дирихле, хотя бы для двух из n находящихся в комнате человек значение k одно и то же. □

Данная задача имеет многочисленные переформулировки. Например, если в комнату заходят n человек, и кто-то с кем-то здоровается за руку, то существует по крайней мере два человека, которые пожали одинаковое количество рук. Или если в шахматном турнире участвуют n человек, и любые два участника играют только по одной партии друг против друга, то в любой момент времени существует по меньшей мере два игрока, которые завершили одинаковое количество партий. Легче же всего эта задача формулируется на языке теории графов. Именно, с точки зрения теории графов все эти задачи равносильны утверждению о том, что в графе на n вершинах хотя бы две вершины имеют одинаковую степень.

1.1.6. Большое количество примеров на применение принципа Дирихле можно найти в разного рода геометрических задачах. Приведем достаточно характерный пример такого рода задач.

Пример 1.5. В прямоугольнике со сторонами 6×8 сантиметров помещены пять точек. Доказать, что существуют хотя бы две точки, расстояние между которыми меньше или равно пяти сантиметрам.

Доказательство. Действительно, поделим исходный прямоугольник на четыре равные части размерами 3×4 сантиметра. Так как пять точек должны находиться либо внутри, либо на границах этих четырех прямоугольников, то, согласно принципу Дирихле, хотя бы две из них должны лежать либо внутри, либо на границах одного и того же прямоугольника. Осталось заметить, что расстояние между любыми такими точками меньше или равно пяти сантиметрам. □

1.1.7. В заключение данного пункта приведем еще один интересный пример на принцип Дирихле, который предложили венгерские математики Эрдеш и Секереш.

Пример 1.6. Выделим в множестве $[2n]$ первых $2n$ целых положительных чисел подмножество $S \subset [2n]$ мощности $(n+1)$. Доказать, что в этом подмножестве существуют хотя бы два числа, одно из которых делит другое.

Решение. Для применения принципа Дирихле нам нужно каким-то образом связать голубей с элементами $(n+1)$-элементного подмножества S, а клетки — с элементами какого-то n-элементного множества N. Оказывается, что в рассматриваемом примере нам в качестве множества N нужно выбрать n-элементное подмножество всех нечетных чисел.

Действительно, ключевое для решения данной задачи наблюдение состоит в том, что любое число $s \in S$ может быть представлено в виде

$$s = 2^r \cdot q,$$

где q есть нечетное число, $1 \leqslant q \leqslant 2n-1$. Так как таких чисел s ровно $n+1$ штук, то, согласно принципу Дирихле, у нас обязательно найдутся среди них два числа с одинаковым нечетным делителем q. Как следствие, одно из этих чисел обязательно делит второе.

Данная задача допускает еще несколько решений. Одно из них базируется на построении дерева с корнем в вершине 1 по следующему правилу. Соединим все простые числа ребрами с единицей. Для любого другого числа соединим его ребром с наибольшим делителем этого числа. Заметим, что листьев в таком дереве не более n — это следует из того, что любое число i в диапазоне от 1 до n является делителем по крайней мере одного числа из диапазона от 1 до $2n$, а именно, числа $2i$. Так как нам задано $n+1$ число, то хотя бы два из них будут принадлежать ветке, имеющей общий лист, а значит, будут делиться одно на другое.

Еще одно решение является некоторой комбинацией двух предыдущих. Именно, разобъем множество чисел на цепочки

$$1, 2, 4, 8, \ldots, \qquad 3, 6, 12, 24, \ldots, \qquad 5, 10, 20, 40, \ldots, \qquad 7, 14, 28, \ldots$$

в каждой из которых любое число делится на предыдущее. Заметим, что любая такая цепочка может начинаться только лишь с нечетного числа — любое четное число $2a$ мы можем поделить на два и получить число a, делящее $2a$. Следовательно, количество таких цепочек совпадает с количеством нечетных чисел и равно n. Тогда какие-то два из $(n+1)$-го числа обязательно попадут в одну цепочку, а значит, одно из них будет делиться на второе.

1.2. Часто в задачах нужно определить минимальное количество k предметов, гарантированно обеспечивающих наличие хотя бы r предметов в одном из n ящиков.

1.2.1. Очевидно, что в случае $r = 2$ мы должны взять $n+1$ предмет — действительно, согласно принципу Дирихле, в этом случае хотя бы в одном ящике гарантированно окажется по крайней мере два предмета.

В более общем случае нам достаточно взять

$$k = n \cdot (r-1) + 1 \tag{1}$$

предметов. Действительно, $n \cdot (r-1)$ предмет мы еще можем распределить по n ящикам так, чтобы в каждом ящике находилось не более $(r-1)$-го предмета, а вот в случае $k = n \cdot (r-1)+1$ у нас хотя бы в одном ящике гарантированно окажется хотя бы r предметов.

Последнее утверждение часто называют обобщенным принципом Дирихле и формулируют его так. Пусть у нас имеются k предметов, которые мы должны распределить по $n < k$ ящикам. Тогда существует по крайней мере один ящик, в котором содержится не менее чем

$$\lceil k/n \rceil$$

предметов, где $\lceil k/n \rceil$ — ближайшее целое число, большее или равное k/n.

1.2.2. В качестве примера на использование обобщенного принципа Дирихле рассмотрим следующую задачу.

Пример 1.7 (Эрдеш, Секереш). Доказать, что любая последовательность из n^2+1 целых чисел содержит либо убывающую, либо возрастающую подпоследовательность, состоящую из не менее чем $(n+1)$-го числа.

Для доказательства данного утверждения введем количество s_i чисел в самой длинной возрастающей подпоследовательности, начинающейся с a_i. Например, для последовательности чисел

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \{1, 5, 3, 2, 4\} \qquad s_1 = 3,\ s_2 = 1,\ s_3 = 2,\ s_4 = 2,\ s_5 = 1.$$

Сразу заметим, что если существует такое i, что $s_i \geqslant (n+1)$, то процесс завершен. В нашем случае $s_1 = 3 = (2+1)$, и поэтому в нашем случае все в порядке — эта последовательность содержит возрастающую подпоследовательность $\{1, 3, 4\}$ длины три. Для подпоследовательности же

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \{1, 5, 4, 3, 2\} \qquad s_1 = 2,\ s_2 = 1,\ s_3 = 1,\ s_4 = 1,\ s_5 = 1,$$

и такого i не существует. Иными словами, в этом случае все (n^2+1) штук s_i принимают значения из диапазона $[1, n]$. Тогда, согласно обобщенному принципу Дирихле, существует по крайней мере

$$\left\lceil \frac{n^2+1}{n} \right\rceil = n+1$$

чисел s_i, значения которых одинаковы и равны s. Все, что нам осталось понять — это то, что соответствующая этим значениям $s_i = s$ подпоследовательность $\{a_i\}$, состоящая из $(n+1)$-го числа, является убывающей.

Действительно, предположим, что в этой подпоследовательности существует такая пара индексов (i, j), что $j > i$ и $a_j > a_i$. Напомним, что по определению числа s_j, возрастающая подпоследовательность чисел, начинающаяся с a_j имеет длину $s_j = s$. Добавляя a_i в начало этой подпоследовательности, мы получим возрастающую последовательность длины $s+1$, начинающуюся с a_i. Это, в свою очередь, противоречит тому, что наибольшая числовая возрастающая последовательность, начинающаяся с a_i, имеет длину, равную $s_i = s$.

2 Основные правила перечислительной комбинаторики

2.1. Перейдем теперь к описанию простейших фактов, лежащих в основе перечислительной комбинаторики. Начнем с очень краткого напоминания основных понятий теории множеств.

Определение 2.1. Множеством $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ называется совокупность различимых объектов x_i, $i = 1, \ldots, n$, объединенных по некоторому признаку.

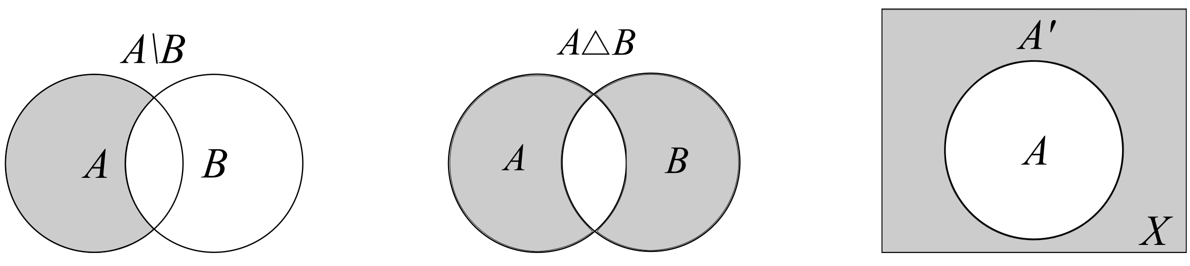
В качестве характерного примера можно рассмотреть, например, множество X всех студентов, находящихся в данной аудитории. Действительно, все студенты различимы, отличны друг от друга и объединены по признаку “собрались в данной аудитории”.

Определение 2.2. Мощностью $|X|$ множества X называется количество элементов в нем. Как правило, мы будем рассматривать конечные множества, в которых $|X| = n$, $n \in \mathbb{N}$, и называть их n-множествами.

2.1.1. Основные операции над множествами — это объединение $A \cup B$ (рис.1,a), пересечение $A \cap B$ (рис.1,b), разность $A \setminus B$ (рис.2,a) и симметрическая разность (рис.2,b) двух множеств A и B. В случае, если множество A является подмножеством некоторого более широкого множества X, удобно также рассматривать операцию дополнения $A' := X \setminus A$ множества A (рис.2,c).

(a) Объединение (b) Пересечение

Рис. 1



(a) Разность (b) Симметрическая разность (c) Дополнение

Рис. 2

Свойства операций над множествами удобно изучать графически, с использованием так называемых *диаграмм Эйлера-Венна* (смотри рисунки 1 и 2). Например, с их помощью достаточно просто проиллюстрировать справедливость законов де Моргана

$$A' \cap B' = (A \cup B)', \qquad A' \cup B' = (A \cap B)' \tag{2}$$

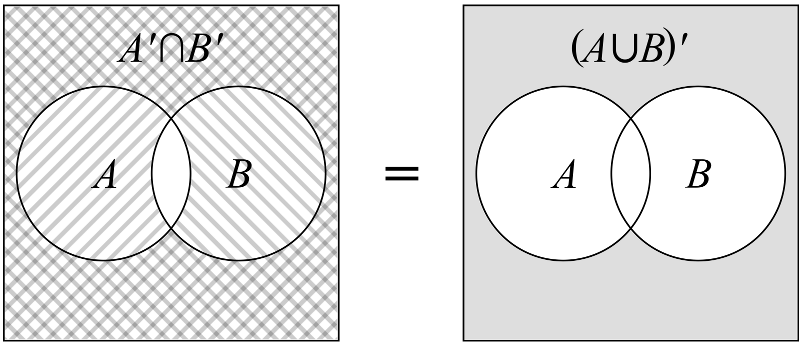


Рис. 3: Графическое доказательство закона де Моргана

(смотри рис.3).

2.1.2. В дальнейшем мы достаточно часто будем использовать понятие покрытия множества X семейством $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ множеств, а также всевозможные частные случаи этого понятия.

Определение 2.3. Семейство множеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ называется *покрытием* множества X, если их объединение дает нам все множество X:

$$X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k = X.$$

Важным частным случаем покрытия является понятие разбиения множества.

Определение 2.4. Говорят, что семейство множеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ образует *разбиение* множества X, если

1. множества $X_i \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots, n$;
2. $X_i \cap X_j = \varnothing \ \forall i \neq j$;
3. $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k = X$.

Элементы X_i этого семейства называются *блоками* разбиения.

В качестве характерного примера можно рассмотреть разбиение студентов данного курса на группы. Студенческие группы являются при этом блоками данного разбиения.

Если по каким-то причинам оказывается важным порядок следования блоков, то говорят об *упорядоченном разбиении* $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ множества X. Например, если мы выводим группы на сцену для вручения им дипломов, то важен порядок, в котором они туда выходят. Следовательно, в данном случае мы получаем упорядоченное разбиение студентов данного курса.

Наконец, еще одним частным случаем покрытия X семейством множеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ является понятие *разделения* множества X. Разделение есть аналог упорядоченного разбиения, в котором допускаются пустые блоки. Точное определение таково:

Определение 2.5. Разделением множества X называется упорядоченная последовательность $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ возможно пустых, попарно непересекающихся множеств, объединение которых дает все множество X.

2.1.3. Еще одной часто использующейся в комбинаторике операцией над множествами является операция декартова произведения множеств.

Определение 2.6. Декартовым произведением множеств A и B называется множество

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

всех упорядоченных пар (a, b), таких, что $a \in A$, $b \in B$.

В качестве простейшего примера декартова произведения множеств обычно приводят шахматную доску. Любая клетка шахматной доски имеет координаты "буква-цифра", например, $e5$ или $h4$. Иными словами, координаты клеток шахматной доски являются элементами декартова произведения множеств $A = \{a, b, \ldots, h\}$ и $B = \{1, 2, \ldots, 8\}$.

В частном случае множества A и B могут совпадать. В этом случае декартово произведение $A \times A$ обозначается через $A^{(2)}$.

Определение 2.7. Декартовым произведением k множеств $X_1, X_2, \ldots, X_k$ называется множество

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k := \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid x_i \in X_i,\ \forall\ i = 1, \ldots, k\}$$

всевозможных упорядоченных k-элементных последовательностей вида $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

В частном случае $X_1 = X_2 = \ldots = X_k = X$ имеем декартову степень $X \times X \times \ldots \times X =: X^{(k)}$.

2.1.4. Любой элемент $X^{(k)}$ есть упорядоченный набор из k элементов множества X, в котором некоторые элементы могут повторяться. Если же в таком k-множестве порядок элементов не важен, говорят о *k-мультимножестве над множеством X*. Формальное определение k-мультимножества таково.

Определение 2.8. k-мультимножеством над n-элементным множеством X называется пара (X, φ), где $\varphi\colon X \to \mathbb{Z}_+$ есть функция, сопоставляющая любому элементу $x \in X$ количество $\varphi(x)$ его вхождений в k-мультимножество.

Любую функцию φ такого рода можно определить с помощью множества Ξ упорядоченных пар

$$\Xi := \{(x, \varphi(x)) \mid x \in X\}.$$

Поэтому, например, 3-мультимножество над множеством $X = \{x, y\}$, состоящее из двух элементов x и одного элемента y, можно формально записывать в виде $(X, \{(x, 2), (y, 1)\})$. Однако чаще вместо такой формальной записи используют более наглядную форму записи вида $\{x, x, y\}$.

Самый простой и понятный пример мультимножества — это монеты в кошельке. В этом примере в качестве множества X выступает множество из девяти монет разного достоинства:

$$X = \{1 \text{ копейка}, 5 \text{ копеек}, 10 \text{ копеек}, 50 \text{ копеек}, 1 \text{ рубль}, 2 \text{ рубля}, 5 \text{ рублей}, 10 \text{ рублей}\}.$$

Любой набор из этих монет в количестве k штук образует k-мультимножество над множеством X.

2.1.5. Теория множеств как раздел математики создавалась значительно позже комбинаторики. Поэтому некоторые наиболее важные понятия теории множеств исторически получили в комбинаторике свои, специфические названия. Именно,

1. k-сочетанием без повторений называется любое k-элементное подмножество n-элементного множества;

2. k-сочетанием с повторениями называется любое k-мультимножество над n-множеством;

3. k-перестановкой без повторений называется упорядоченное k-подмножество n-элементного множества;

4. k-перестановкой с повторениями называется любой элемент декартовой степени $X^{(k)}$.

2.2. Теперь перейдем к двум самым простым, но в то же время достаточно важным правилам перечислительной комбинаторики — правилу суммы и правилу произведения.

2.2.1. Начнем с простейшего примера: пусть на одном блюде лежат три яблока, а на втором — две груши; сколькими способами можно выбрать один фрукт? Ответ очевиден: пятью способами.

Обобщающее этот пример простейшее *правило суммы* можно сформулировать так: если некоторый объект из множества A можно выбрать k способами, и, вне зависимости от выбора этого объекта, можно n способами выбрать некоторый элемент множества B, то выбор объекта из множества A *или* из множества B можно осуществить $k+n$ способами.

Очевидна переформулировка этого правила на языке теории множеств: пусть пересечение двух множеств A и B пусто; тогда
$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$
В частности, если $A \subset X$ и A' — дополнение множества A, то
$$|A| + |A'| = |X|. \tag{3}$$

В более общем случае, рассматривая произвольное разбиение множества X на блоки, имеем равенство вида
$$|X| = |X_1| + |X_2| + \ldots + |X_k|,$$
которое также называется правилом суммы в комбинаторике.

2.2.2. Под правилом произведения в комбинаторике понимается равенство
$$|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \ldots \cdot |X_k|.$$

Приведем простейший пример на применение этого правила в комбинаторике. Пусть в аудитории находятся 32 студента одной группы, 24 студента другой группы и 17 студентов третьей группы. В этом случае тройку, состоящую из представителей каждой группы, можно выбрать $32 \cdot 24 \cdot 17$ способами.

2.3. Наряду с правилом суммы, в элементарной комбинаторике также достаточно часто используется и несложное его обобщение — так называемый *принцип включения-исключения*. Если правило суммы связано с разбиением множества X, то принцип включения-исключения связан с некоторым произвольным покрытием этого n-множества семейством $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$. Сформулируем его для самого простого случая двух множеств.

2.3.1. Рассмотрим два конечных множества A и B, пересечение которых может быть и непусто. Тогда количество элементов в объединении этих множеств, очевидно, равно

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{4}$$

Действительно, когда мы считаем количество $|A|$ элементов в множестве A и складываем его с количеством $|B|$ элементов в множестве B, мы любой элемент, принадлежащий как множеству A, так и множеству B, считаем дважды. Чтобы этот избыток убрать, нам нужно один раз вычесть количество элементов, содержащихся в пересечении этих двух множеств.

Равенство (4) можно называть обобщенным правилом суммы — оно обобщает правило суммы на случай, когда пересечение двух множеств не пусто.

2.3.2. Предположим теперь, что A и B являются подмножествами некоторого более широкого множества X. В этом случае у множества $A \subset X$ и множества $B \subset X$ имеются дополнения к ним — множества A' и B', причем $A \cup A' = B \cup B' = X$.

Рассмотрим теперь пересечение $A' \cap B'$ дополнений множеств A и B. Согласно одной из теорем де Моргана (2), $A' \cap B' = (A \cup B)'$. Следовательно, количество элементов в этом пересечении с учетом равенства (3) и обобщенного правила суммы (4) можно сосчитать так:

$$|A' \cap B'| = |(A \cup B)'| = |X| - |A \cup B| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

Равенство

$$|A' \cap B'| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|, \tag{5}$$

и называется в комбинаторике принципом включения-исключения.

2.3.3. Приведем простейший пример его использования. Пусть в аудитории находятся 30 человек, 20 человек из которых знают английский, 12 — французский, а 6 человек знают оба языка. Сколько человек не знает ни один из этих иностранных языков? Ответ, согласно принципу включения-исключения (5), следующий:

$$N = 30 - 20 - 12 + 6 = 4.$$

2.3.4. Несложно обобщить равенства (4) и (5) на случай большего количества множеств. Например, для трех множеств A, B, C соответствующие формулы выглядят так:

а) обобщенное правило суммы:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|; \tag{6}$$

б) принцип включения-исключения:

$$|A' \cap B' \cap C'| = |X| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|. \tag{7}$$

Действительно, рассмотрим, к примеру, левую часть равенства (6). Она подсчитывает количество элементов, принадлежащих объединению трех множеств (смотри рис.4). Если элемент x_1, принадлежащий этому объединению, содержится в множестве A, но не содержится в множествах B и C, то он один раз подсчитывается в правой части равенства (6) (слагаемое $|A|$, отвечающее зеленой подобласти на рис.4). Если элемент x_2 принадлежит множествам A и B, но не принадлежит C (красная подобласть на рис.4), то в правой части (6) этот элемент входит в слагаемые $|A|$, $|B|$ и $-|A \cap B|$, то есть также подсчитывается ровно один раз. Наконец, если x_3 принадлежит пересечению всех трех множеств (зеленая подобласть на рис.4), то за этот элемент отвечают все слагаемые в правой части (6). Так как четыре из них входят со знаком плюс, а три — со знаком минус, то этот элемент также считается в правой части (6) лишь однажды.

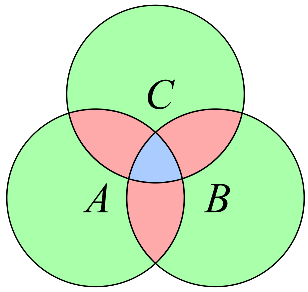


Рис. 4: Диаграмма Эйлера-Венна для трёх множеств

3 Подсчет k-сочетаний из n элементов. Биномиальные коэффициенты.

3.1. Основная задача данного параграфа состоит в подсчете количества всех k-сочетаний из n элементов. Начнем мы с подсчета количества k-сочетаний из n элементов без повторений.

3.1.1. Число k-сочетаний без повторений известно в литературе под названием биномиальных коэффициентов. Ранее в советской литературе такие числа обозначались через C_n^k. В настоящее время для этих коэффициентов используется обозначение $\binom{n}{k}$ (читается "из n по k").

3.1.2. Обычно на вопрос, чему равны биномиальные коэффициенты, вспоминают формулу

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Эта формула не очень удачна с двух точек зрения — с вычислительной и с идейной. С вычислительной точки зрения ее затруднительно использовать для достаточно больших значений n и k. Например, при $n = 38$ и $k = 19$ числитель и знаменатель могут просто не уместиться в диапазон изменения целых чисел для того или иного языка программирования. С идейной же точки зрения эта формула неудобна потому, что она не позволяет обобщить понятие биномиальных коэффициентов на случай целых, вещественных или комплексных значений n. В следующем параграфе мы получим более удобное выражение для этих коэффициентов, допускающее такое обобщение. Здесь же мы с помощью правила суммы выведем рекуррентное соотношение для биномиальных коэффициентов, позволяющее эти биномиальные коэффициенты эффективно вычислять для достаточно больших значений n и k.

3.1.3. Для получения рекуррентного соотношения введем множество Σ_k всех k-элементных подмножеств n-элементного множества X. Например, для $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ множество $\Sigma_2 = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}\}$. Заметим, что биномиальный коэффициент $\binom{n}{k}$ как раз и описывает мощность такого множества. Разобьем теперь множество Σ_k на два блока — блок $\Sigma_k^{(1)}$, k-элементные подмножества которого содержат элемент x_1, и блок $\Sigma_k^{(2)}$, подмножества которого этот элемент не содержат. Понятно, что это — непустые, непересекающиеся подмножества, объединение которых дает нам все множество Σ_k. Поэтому по правилу суммы мы получаем равенство вида

$$\binom{n}{k} = |\Sigma_k| = |\Sigma_k^{(1)}| + |\Sigma_k^{(2)}|.$$

Осталось выразить через биномиальные коэффициенты количество элементов в каждом из блоков $\Sigma_k^{(1)}$, $\Sigma_k^{(2)}$. А это делается довольно легко.

3.1.4. Действительно, во всех подмножествах первого блока элемент x_1 уже выбран, и нам из оставшегося $(n-1)$-элементного множества $X \setminus x_1$ остается выбрать $(k-1)$-элементные подмножества . Сделать это можно $\binom{n-1}{k-1}$ способами. Во втором блоке содержатся k-элементные подмножества множества $X \setminus x_1$, состоящего из $(n-1)$-го элемента. Их количество, очевидно, равно $\binom{n-1}{k}$. Таким образом окончательно имеем следующее рекуррентное соотношение:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \qquad k \geqslant 1, \quad n \geqslant 1. \tag{8}$$

3.1.5. Соотношение (8) следует дополнить начальными и граничными условиями. Так как k-элементных подмножеств n-элементного множества в случае $k > n$ не существует, то

$$\binom{n}{k} = 0 \qquad \text{при} \quad k > n.$$

Далее, пустое подмножество можно выбрать всегда и только одним способом; поэтому

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \forall\, n \geqslant 0.$$

Используя эти условия, можно шаг за шагом вычислить коэффициенты $\binom{n}{k}$. Часто их записывают в виде так называемого треугольника Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \cdots & & & &
\end{array}$$

3.1.6. Как видно, треугольник Паскаля симметричен, т.е. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Комбинаторное доказательство этого факта очевидно. Действительно, выбирая любое k-элементное множество, мы тем самым однозначно выбираем и дополнение к нему, т.е. $(n-k)$-элементное множество. Следовательно, количество k-элементных и $(n-k)$-элементных подмножеств совпадает.

3.2. Наряду с треугольником Паскаля биномиальные коэффициенты допускают и еще одно очень удобное графическое представление — представление на координатной плоскости (n, k)

3.2.1. Данное представление связано со следующей довольно интересной комбинаторной задачей. Рассмотрим плоскость (n, k) и нарисуем на этой плоскости пути, исходящие из начала координат, приходящие в точку с координатами (n, k), $n \geqslant 0$, $k = 0, \ldots, n$, и состоящие из диагональных и вертикальных отрезков (рис.5). В самих точках (n, k) отметим количество таких путей, приходящих в эту точку из начала координат. Заметим теперь, что попасть в точку с координатами (n, k) мы можем, пройдя только лишь через точку с координатами $(n-1, k)$ или через точку с координатами $(n-1, k-1)$. С комбинаторной точки зрения это означает, что количество путей $\binom{n}{k}$, приходящих в точку с координатами (n, k), равняется количеству $\binom{n-1}{k}$ путей, приходящих в точку с координатами $(n-1, k)$, плюс количество путей $\binom{n-1}{k-1}$, приходящих в точку с координатами $(n-1, k-1)$. Но равенство

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

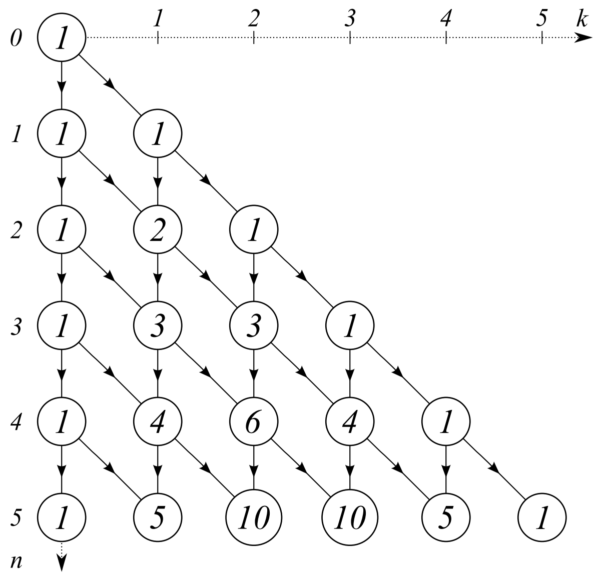


Рис. 5: Графическое представление чисел $\binom{n}{k}$ на координатной плоскости (n,k)

есть основное тождество для биномиальных коэффициентов (8). А это означает, что мы получили новую комбинаторную интерпретацию таких коэффициентов. Именно, числа $\binom{n}{k}$ описывают количество путей, состоящих из диагональных $(1,1)$ и вертикальных $(1,0)$ отрезков, выходящих из начала координат — точки $(0,0)$, и оканчивающихся в точке с координатами (n,k).

3.2.2. Графическое представление чисел $\binom{n}{k}$ на плоскости (n,k) очень удобно для получения разного рода тождеств с биномиальными коэффициентами. В качестве первого примера зафиксируем какое-то конкретное значение параметра k и просуммируем биномиальные коэффициенты $\binom{m}{k}$ по m от k до некоторого фиксированного значения n. Например, выберем $k=1$, $n=4$. Складывая числа $1,2,3,4$, мы получим число 10, то есть биномиальный коэффициент, стоящий правее и ниже рассмотренной цепочки биномиальных коэффициентов. Есть подозрение, что данный факт, а именно, равенство вида

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\ldots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1} \tag{9}$$

выполняется для любых значений параметров n и k.

3.2.3. Для формального доказательства тождества

$$\sum_{m=0}^{n}\binom{m}{k}=\underbrace{\binom{0}{k}+\binom{1}{k}+\ldots+\binom{k-1}{k}}_{=0}+\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\ldots+\binom{n}{k}=\sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k}=\binom{n+1}{k+1},$$

называемого формулой суммирования биномиальных коэффициентов по верхнему индексу, применим рекуррентное соотношение (8) к коэффициенту $\binom{m+1}{k+1}$:

$$\binom{m+1}{k+1}=\binom{m}{k}+\binom{m}{k+1}\qquad\Longrightarrow\qquad\binom{m}{k}=\binom{m+1}{k+1}-\binom{m}{k+1}.$$

Просуммируем теперь полученное равенство по m от k до n:

$$\sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k}=\binom{n+1}{k+1}+\sum_{m=k}^{n-1}\binom{m+1}{k+1}-\sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k+1}=$$
$$=\binom{n+1}{k+1}+\sum_{m=k}^{n-1}\binom{m+1}{k+1}-\sum_{m=k+1}^{n}\binom{m}{k+1}=$$
$$=\binom{n+1}{k+1}+\sum_{m'=k+1}^{n}\binom{m'}{k+1}-\sum_{m=k+1}^{n}\binom{m}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}.$$

3.2.4. Комбинаторное доказательство тождества (9) основано на следующем общем подходе: мы разбиваем множество Σ_{k+1} всех $(k+1)$-элементных подмножеств $(n+1)$-элементного множества X на блоки, подсчитываем количество элементов в каждом блоке, а затем пользуемся правилом суммы для подсчета числа $|\Sigma_{k+1}|=\binom{n+1}{k+1}$.

Для реализации этого подхода возьмем $(n+1)$-элементное множество

$$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\ldots,x_{n-1},x_n,x_{n+1}\}$$

и будем разбивать множество всех $(k+1)$-элементных подмножеств множества X следующим образом. В первый блок поместим все $(k+1)$-элементные подмножества, содержащие элемент x_{n+1}. Такие подмножества элемент x_{n+1} гарантированно содержат. Нам из оставшихся элементов $x_1,\ldots,x_n$ множества $X\setminus x_{n+1}$ нужно выбрать недостающие k элементов. По определению биномиального коэффициента, сделать мы это можем $\binom{n}{k}$ способами.

Теперь мы рассмотрим все $(k+1)$-элементные подмножества, которые не содержат элемент x_{n+1}, но обязательно содержат элемент x_n. Для того, чтобы любое такое подмножество сформировать, нам нужно из множества элементов $\{x_1,\ldots,x_{n-1}\}$ выбрать недостающие k элементов. Это можно сделать $\binom{n-1}{k}$ количеством способов.

Затем рассмотрим все $(k+1)$-элементные подмножества, которые содержат в обязательном порядке элемент x_{n-1} и не содержат элементов x_{n+1} и x_n. Эти подмножества получаются выбором недостающих k элементов из множества элементов $\{x_1,\ldots,x_{n-2}\}$, и выбрать такие подмножества можно $\binom{n-2}{k}$ способами.

Продолжая далее, мы дойдем когда-то до ситуации, в которой нам нужно выбрать все $(k+$ $+\,1)$-элементные подмножества, которые содержат элемент x_{k+1} и не содержат элементы со старшими индексами. Так как элемент x_{k+1} у нас уже выбран, то нам остается из множества $\{x_1,\ldots,x_k\}$ выбрать k-элементное подмножество. Сделать мы это можем, очевидно, $\binom{k}{k}=1$ способом.

Складывая теперь количество элементов в каждом блоке, мы и получаем тождество (9).

Пример 3.1. Пусть $n=4$, $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$, $k=2$, $k+1=3$. Приведем список всех трехэлементных подмножеств этого множества:

$$\{x_1,x_2,x_3\},\quad \{x_1,x_2,x_4\},\quad \{x_1,x_2,x_5\},\quad \{x_1,x_3,x_4\},\quad \{x_1,x_3,x_5\},$$
$$\{x_1,x_4,x_5\},\quad \{x_2,x_3,x_4\},\quad \{x_2,x_3,x_5\},\quad \{x_2,x_4,x_5\},\quad \{x_3,x_4,x_5\}.$$

В первый блок разбиения этого множества подмножеств включим подмножества, содержащие элемент x_5; таковых имеется $\binom{4}{2}=6$ штук. Из *оставшегося* списка выберем все подмножества, содержащие x_4; их $\binom{3}{2}=3$ штуки. Наконец, у нас остается единственное подмножество элементов, не содержащих ни x_4, ни x_5, т.е. подмножество $\{x_1,x_2,x_3,\}$.

3.2.5. В заключение данного пункта докажем комбинаторно еще одно важное тождество для биномиальных коэффициентов — так называемое тождество Вандермонта

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k-i}.$$

Рассмотрим для этого группу, состоящую из n мужчин и m женщин. По определению, количество способов выбрать из нее команду, состоящую из k человек, равно биномиальному коэффициенту $\binom{n+m}{k}$. С другой стороны, мы можем выбирать эту команду так, чтобы в ней было ровно i мужчин и $(k-i)$ женщин. При фиксированном i количество способов подбора такой команды, согласно правилу произведения, равно $\binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k-i}$. Меняя теперь i от нуля до k, мы вновь получим общее количество способов образовать требуемую команду.

Замечание 3.2. Приведенные выше рассуждения очень часто используются в комбинаторике. Они даже имеют специальное название — *принцип double counting* или правило подсчета двумя способами. Основная идея такого рода рассуждений состоит в следующем: если две формулы подсчитывают количество одних и тех же элементов, то эти формулы равны.

3.3. Название "биномиальные коэффициенты" связано с тем, что они, помимо всего прочего, встречаются в формуле бинома Ньютона

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, y^{n-k}. \tag{10}$$

3.3.1. Комбинаторное доказательство этой формулы довольно элементарно: нужно просто расписать $(x+y)^n$ в виде произведения n сомножителей

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)}_{1} \cdot \underbrace{(x+y)}_{2} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(x+y)}_{n}$$

и пометить каждый из таких сомножителей числом в диапазоне от единицы до n. В результате мы имеем множество X, состоящее из n *различных* экземпляров сомножителей вида $(x+y)$.

После перемножения этих n скобок получается определенный набор слагаемых вида $x^k y^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Для подсчета количества этих слагаемых при фиксированном значении параметра k заметим, что любое слагаемое $x^k y^{n-k}$ можно получить так: выбрать в n-элементном множестве X k-элементное подмножество, взять в этом подмножестве в качестве сомножителей переменные x, а в оставшемся $(n-k)$-элементном подмножестве выбрать в качестве сомножителей переменные y. Как следствие, количество слагаемых $x^k y^{n-k}$ совпадает с количеством способов выбрать k-элементное подмножество n-элементного множества X и равно $\binom{n}{k}$.

3.3.2. Формула (10) оказывается чрезвычайно полезной для вывода разного рода соотношений, связанных с биномиальными коэффициентами. Например, полагая в ней $x = y = 1$, получаем тождество

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n. \tag{11}$$

Заметим теперь, что, суммируя биномиальные коэффициенты $\binom{n}{k}$ по k, мы подсчитываем *все* подмножества n-элементного множества. Иными словами, мы формально доказали тот факт, что количество всех подмножеств данного n-множества равно 2^n.

3.3.3. Для комбинаторного доказательства равенства (11) воспользуемся чрезвычайно полезным и часто использующимся в комбинаторике *принципом биекции.* Формально этот принцип можно сформулировать следующим образом: пусть X, Y — пара конечных множеств, и пусть существует биекция $f\colon X \to Y$, т.е. такое отображение, что

$$\forall\, y \in Y \qquad \exists!\, x \in X: \qquad y = f(x).$$

Тогда количество элементов в множествах X и Y совпадают: $|X| = |Y| = n$.

Неформально использование принципа биекции можно проиллюстрировать на следующем примере. Предположим, что вы устраиваете вечеринку и приглашаете на нее довольно много друзей. Как гостеприимный хозяин, вы встречаете всех своих друзей на входе в дом, но запоминаете только пришедших к вам девушек. В какой-то момент вы решаете подсчитать, сколько парней пришло к вам на вечеринку. Вы знаете количество пришедших к вам девушек, и вам кажется, что количество девушек и парней одинаково. Как вам быстро проверить это предположение? Ответ достаточно очевиден: попросить каждую девушку взять ровно одного парня за руку. Если в результате этой процедуры все множество гостей разбилось на пары, то ваше предположение окажется верным. Тем самым вы сильно упростили себе жизнь — вам не пришлось проделывать довольно утомительную работу по пересчету пришедших к вам парней, вы просто воспользовались для их подсчета результатом уже проделанной работы по пересчету пришедших к вам девушек.

Вернемся теперь к равенству (11). Заметим, что любое подмножество A множества X мы можем закодировать бинарной строкой $f(A)$ длины n, то есть строкой над алфавитом $\{0, 1\}$. Единице на i-м месте строки будет при этом отвечать ситуация, при которой $x_i \in A$, а нулю — вариант, при котором $x_i \notin A$. Так, если множество X имеет вид $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, а подмножество A записывается в виде $A = \{x_2, x_4\}$, то соответствующая этому подмножеству строка длины 4 равна

$$f(A) = (0, 1, 0, 1).$$

Очевидно, что построенное отображение f взаимно-однозначно. Следовательно, количество подмножеств данного n-множества X совпадает с количеством бинарных строк длины n. А таких строк у нас имеется ровно 2^n штук — действительно, на любое из n мест мы двумя способами можем поставить либо ноль, либо единицу.

3.3.4. Полагая в (10) $x = -1$, $y = 1$, мы получаем еще одно важное тождество

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0, \qquad n > 0. \tag{12}$$

Для того, чтобы понять комбинаторный смысл равенства (12), перепишем его в следующем виде:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \ldots$$

В левой части последнего равенства стоит количество всех подмножеств, в которых содержится четное количество элементов, а в правой — число подмножеств, содержащих нечетное количество элементов. Иными словами, следствием равенства (12) является тот факт, что количество четных подмножеств любого множества, отличного от $\varnothing$, равняется количеству его нечетных подмножеств.

Наконец, из (12) мы также можем заключить, что количество, например, всех нечетных подмножеств ровно в два раза меньше общего количества всех подмножеств. С учетом (11) это означает, что количество всех нечетных подмножеств равно 2^{n-1}.

3.3.5. Наконец, продифференцируем (10) по x:

$$n\,(x+y)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}\, y^{n-k}. \tag{13}$$

Подставляя в это равенство $x = y = 1$, получим еще одно полезное равенство:

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n\, 2^{n-1}. \tag{14}$$

3.4. Перейдем теперь к задачам, связанным с подсчетом k-сочетаний с повторениями.

3.4.1. Начнем с примера. Пусть множество X состоит из двух чисел 1 и 2. Выпишем все 3-сочетания с повторениями из 2-множества X:

$$\{1,1,1\}, \qquad \{1,1,2\}, \qquad \{1,2,2\}, \qquad \{2,2,2\}.$$

Как видно, таковых оказалось 4 штуки. Для подсчета количества $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ таких мультимножеств в общем случае нам будет удобнее вначале конкретизировать n-множество X, а именно, взять в качестве X множество $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ первых n натуральных чисел. Любое k-мультимножество такого множества можно записать, очевидно, в следующем виде:

$$1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k \leqslant n.$$

Например, 3-мультимножество $\{1,1,2\}$ над 2-множеством $X = \{1,2\}$ можно записать так:

$$1 \leqslant (a_1 = 1) \leqslant (a_2 = 1) \leqslant (a_3 = 2) \leqslant (n = 2).$$

Теперь превратим в этой цепочке все нестрогие неравенства в строгие. Для этого мы к a_2 прибавим единицу, к a_3 — двойку, к a_4 — тройку, и так далее. К последнему числу a_n мы, таким образом, добавим число $(k-1)$. В результате получим цепочку строгих неравенств вида

$$1 \leqslant a_1 < a_2 + 1 < a_3 + 2 < a_4 + 3 < \ldots < a_k + (k-1) \leqslant n + (k-1).$$

В нашем примере

$$1 \leqslant (a_1 = 1) < (a_2 + 1 = 2) < (a_3 + 2 = 4) \leqslant (n + (3-1) = 4).$$

Заметим, что в результате этой операции мы получили некоторое k-элементное подмножество *различных* чисел вида $a_i + (i-1)$ множества $\widetilde{X} = [n+k-1]$ всех чисел от единицы до $n+k-1$. Иными словами, мы сопоставили любому k-мультимножеству над множеством $X = [n]$ вполне определенное k-подмножество множества $\widetilde{X} = [n+k-1]$. Очевидно, что это сопоставление взаимно-однозначно. Но количество всех k-подмножеств данного множества мы знаем — оно равно $\binom{n+k-1}{k}$. Следовательно, этому числу равно, по принципу биекции, и количество $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ всех k-мультимножеств над множеством $X = [n]$:

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Справедливость этого равенства для произвольного n-элементного множества X вновь следует из принципа биекции.

4 k-перестановки из n элементов. Урновые схемы и схемы раскладки предметов по ящикам.

4.1. Перейдем теперь к подсчету количества k-перестановок из n элементов.

4.1.1. Напомним, что k-перестановкой из n элементов называется *упорядоченный* набор

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k)$$

элементов, в котором все a_i принадлежат одному и тому же n-элементному множеству X.

Элементы a_i в наборе $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ могут как повторяться, так и не повторяться. В первом случае говорят о k-перестановках с повторениями, во втором — о k-перестановках без повторений.

Номер паспорта — это типичный пример k-перестановки с повторениями над множеством из десяти цифр $X = \{0, 1, \ldots, 9\}$. Классическим примером 3-перестановки без повторений является упорядоченный список спортсменов, занявших призовые места в любых спортивных соревнованиях.

4.1.2. В литературе встречается довольно много альтернативных названий для данного объекта. Именно, упорядоченный набор $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $a_i \in X$, также иногда называется

– k-размещением из n элементов;

– кортежем из k элементов множества X;

– упорядоченной k-выборкой из n элементов;

– k-мерным вектором над множеством X;

– k-элементным словом над n-элементным алфавитом.

4.1.3. Сосчитаем количество k-перестановок с повторениями.

Утверждение 4.1. *Количество k-перестановок с повторениями из n элементов равно n^k.*

Для доказательства можно либо просто сослаться на правило произведения, либо рассмотреть $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $a_i \in X$ как слово из k элементов над алфавитом из $n = |X|$ букв. На первое место в слове мы можем поставить любую из n букв, на второе — также любую из n букв и так далее. Всего же получаем n^k вариантов записать данное слово.

4.1.4. Перейдем теперь к подсчету количества перестановок без повторений.

Утверждение 4.2. *Количество $P(n, k)$ k-перестановок из n элементов без повторений равно*

$$P(n, k) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) =: (n)_k.$$

Доказательство очевидно — на первое место в строке длины k я могу поставить любой из n элементов, на второе — любой из оставшихся $(n-1)$ элементов и так далее.

4.1.5. В частном случае $k = n$ k-перестановки из n элементов без повторений называются просто перестановками n-элементного множества X. Их количество равно

$$P_n \equiv P(n) = n!, \qquad P(0) = 0! = 1.$$

4.1.6. Любую k-перестановку из n элементов без повторений можно рассматривать и как упорядоченное k-подмножество n-множества. Количество таких подмножеств мы можем сосчитать следующим образом: мы можем $\binom{n}{k}$ способами выбрать k-подмножество n-элементного множества, а затем $k!$ способами его упорядочить. Действительно, на первое место мы можем поставить любой из k элементов подмножества, на второе — любой из оставшихся $k-1$ элементов и так далее. Таким образом, мы получаем некоторое новое выражение для количества всех упорядоченных k-элементных подмножеств n-множества, то есть количества k-перестановок из n элементов без повторений, равно

$$(n)_k = k! \cdot \binom{n}{k} \qquad \Longrightarrow \qquad \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}.$$

Последняя формула часто используется как некомбинаторное определение биномиальных коэффициентов $\binom{n}{k}$ в случае, когда $k \in \mathbb{Z}$, а n принадлежит $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ или даже $\mathbb{C}$. Именно, по определению,

$$\binom{q}{k} := \begin{cases} \dfrac{q\,(q-1)\,\ldots\,(q-k+1)}{k!} =: \dfrac{(q)_k}{k!}, & \text{если } k \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{если } k = 0, \\ 0, & \text{если } k < 0, \end{cases} \qquad \forall\, q \in \mathbb{C}.$$

Например,

$$\binom{-1}{3} = \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}{3\cdot 2\cdot 1} = -1.$$

4.1.7. Функцию $(q)_k$ часто также обозначают через $q^{\underline{k}}$ и называют *убывающей факториальной степенью* [?]. Наряду с убывающей можно ввести и так называемую *возрастающую факториальную степень*

$$q^{(k)} \equiv q^{\overline{k}} := q\cdot(q+1)\cdot\ldots\cdot(q+k-1).$$

В частности, с ее помощью получается удобное для вычислений выражение для количества $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ сочетаний с повторениями:

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{n^{(k)}}{k!}. \tag{15}$$

4.2. Итак, мы получили простые соотношения для подсчета количества четырех основных объектов элементарной комбинаторики — k-сочетаний и k-перестановок из n элементов с повторениями и без повторений. Эти объекты встречаются в огромном количестве внешне не очень похожих друг на друга задач элементарной комбинаторики. Оказывается, однако, что большинство этих задач можно свести к одной из двух простейших схем — либо к так называемой урновой схеме, либо к схеме раскладки предметов по ящикам.

4.2.1. В урновой схеме имеется урна, в которой находятся n *различимых* предметов. Из урны последовательно вытаскивается k предметов. Задача состоит в подсчете количества различных способов выбора этих предметов, или, как еще говорят, в подсчете различных k-элементных выборок из n предметов, находящихся в урне.

На практике наиболее часто встречаются четыре модификации этой задачи, различающиеся способами формирования k-элементной выборки. Прежде всего, мы можем возвращать или не возвращать вытаскиваемые предметы обратно в урну. В первом случае говорят о *выборке с повторениями*, во втором — о *выборке без повторений.* Далее, в некоторых задачах нам важен порядок вытаскиваемых предметов. В этом случае имеем так называемые *упорядоченные* выборки. В противном случае выборки называются *неупорядоченными.*

Нетрудно понять, что задачи о подсчете k-элементных выборок представляют собой, по сути, те же самые задачи о подсчете k-перестановок или k-сочетаний из n элементов. Действительно, любая неупорядоченная k-элементная выборка представляет собой либо k-элементное подмножество n-множества, либо k-мультимножество над n-элементным множеством в зависимости от того, возвращаем мы вытаскиваемые предметы обратно в урну или не возвращаем. Следовательно, количество таких неупорядоченных выборок совпадает с коэффициентами $\binom{n}{k}$ или $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$. Очевидно также, что любая упорядоченная k-элементная выборка есть просто некоторая k-перестановка n-элементного множества. Поэтому количество таких выборок равно n^k или $(n)_k$ в зависимости от того, говорим ли мы о выборке с повторениями или без повторений.

В результате получаем следующую таблицу решений задач, связанных с урновыми схемами:

Предметы на выходе	с возвращением	без возвращения
упорядоченные	n^k	$(n)_k$
неупорядоченные	$\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$	$\binom{n}{k}$

4.2.2. Приведем несколько характерных примеров, достаточно естественно сводящихся к одной из описанных выше урновых схем.

Пример 4.3. Предположим, что у нас имеется некоторое общество, состоящее из двадцати членов. Сколькими способами можно выбрать президента, вице-президента, секретаря и казначея этого общества?

Решение. Очевидно, что любой способ выбора представляет собой упорядоченное 4-элементное подмножество 20-элементного множества. Следовательно, существует ровно $(20)_4$ различных способов выбора членов общества на эти должности.

Пример 4.4. Для того, чтобы открыть сейф, нужно набрать код из пяти символов с помощью вращающихся дисков. На каждом из этих дисков нанесено 12 символов, одинаковых для каждого из дисков. Сколько вариантов различных кодов существует?

Решение. Любой код представляет собой упорядоченную 5-элементную выборку с повторениями или, иначе, строку из пяти символов над алфавитом из 12 букв. Следовательно, имеется 12^5 вариантов различных кодов.

Пример 4.5. На почте продаются открытки десяти различных видов. Сколькими способами можно купить восемь открыток? А восемь открыток разных видов?

Решение. Понятно, что в первом случае любой набор из восьми открыток представляет собой неупорядоченную выборку с повторениями, а во втором — выборку без повторений из 10 элементов. Следовательно, в первом случае имеем $\left(\!\binom{10}{8}\!\right)$, а во втором — $\binom{10}{8}$ способов покупки восьми открыток.

4.2.3. Второй, не менее популярной в элементарной комбинаторике схемой, связанной с подсчетом количества k-перестановок и k-сочетаний, является схема раскладки предметов по ящикам. В этой схеме имеется n *различимых* ящиков, по которым нужно разложить k *различимых* или *неразличимых* предметов. При этом мы можем накладывать определенные ограничения на количество предметов в каждом ящике.

Рассмотрим, к примеру, задачу о подсчете количества способов раскладки k различимых предметов по n различимым ящикам при условии, что в любой ящик можно класть любое количество предметов. Количество способов совершить эти действия равно, очевидно, n^k. Действительно, любой предмет мы можем положить в любой из n ящиков вне зависимости от того, куда мы положили оставшиеся предметы. Поэтому, согласно правилу произведения, это количество равно n^k. Иными словами, данная задача представляет собой переформулировку задачи о подсчете количества k-перестановок из n элементов с повторениями.

Теперь предположим, что в той же схеме мы не имеем права класть более одного предмета в один ящик. Тогда первый предмет мы можем поместить в любой из n ящиков, второй — в любой из оставшихся свободными $(n-1)$ ящиков и так далее. Всего же получаем $(n)_k$ способов раскладки. Следовательно, данная схема соответствует подсчету k-перестановок без повторений.

4.2.4. Пусть теперь у нас имеются n различимых ящиков и k неразличимых предметов. Тогда подсчет количества различных способов раскладки этих предметов по ящикам сводится к задаче о подсчете количества k-сочетаний из n элементов.

Действительно, в данной схеме в качестве n-элементного множества выступает множество, состоящее из n различимых ящиков. В случае, когда в каждый ящик можно класть не более одного предмета, мы, раскладывая предметы по ящикам, выделяем в этом множестве некоторое k-элементное подмножество. Следовательно, количество таких раскладок совпадает с количеством различных k-элементных подмножеств n-множества и равно $\binom{n}{k}$.

В случае же, когда никаких ограничений на количество предметов в ящике не накладывается, мы, раскладывая по ящикам k неразличимых предметов, задаем тем самым некоторое k-мультимножество n-множества X. Поэтому количество различных способов такой раскладки равно количеству $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ k-сочетаний из n элементов с повторениями.

Подводя итоги, построим таблицу рассмотренных схем раскладок k предметов по n ящикам:

Предметы	Ящики	Произвольное количество предметов в ящике	Не более одного предмета в ящике
различимые	различимые	n^k	$(n)_k$
неразличимые	различимые	$\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$	$\binom{n}{k}$

4.2.5. Проиллюстрируем некоторые характерные примеры задач, которые довольно естественно сводятся к схеме схем раскладки предметов по ящикам.

Пример 4.6. Сколькими способами можно разложить по двум *различимым* карманам (например, левому и правому) девять монет *различного* достоинства?

Решение. Рассматриваемый пример является типичной задачей, которая естественным образом сводится к схеме раскладки предметов по ящикам. Действительно, в роли ящиков здесь выступают левый и правый карман, а в роли предметов — девять различных монет. Поэтому ответ в этой задаче — 2^9 способов.

Замечание 4.7. Рассмотренная задача, однако, не всегда решается верно: в качестве ответа иногда выдают 9^2 способов. Путаница, как правило, происходит потому, что эту задачу пытаются свести к урновой схеме, считая, что имеются урна, в которой расположены 9 различных предметов, а также 2 различимые позиции на выходе.

Для того, чтобы этой путаницы избежать, полезно сформулировать следующие основные отличия схемы раскладки по ящикам от соответствующей ей урновой схемы. Во-первых, в схеме раскладки предметов по ящикам предметы обратно не возвращаются, они остаются в ящике. Во-вторых, в этой схеме в любой ящик можно класть любое количество предметов. В аналогичной урновой схеме на любую позицию помещается ровно один предмет.

Приведем теперь два характерных примера, связанных с раскладкой неразличимых предметов по различимым ящикам.

Пример 4.8. У отца имеется 5 (неразличимых) апельсинов, которые он может раздать восьми своим сыновьям. Если его задача состоит в том, чтобы раздать их максимальному количеству сыновей, то он должен поставить дополнительное условие — любой из его сыновей не должен получить более одного апельсина. В этом случае количество способов, которыми он может раздать своим сыновьям эти пять апельсинов, равно, очевидно, $\binom{8}{5}$. Если же он раздает их по каким-то заслугам, и может, таким образом, любому сыну отдать любое количество апельсинов, то количество способов это сделать равно $\left(\!\binom{8}{5}\!\right) = \binom{12}{5}$.

Пример 4.9. В физике встречаются задачи, в которых имеются n различных уровней энергии и k неразличимых элементарных частиц. Если эти частицы — фермионы, то для них действует так называемый принцип запрета Паули, согласно которому на любом энергетическом уровне может находиться не более одной элементарной частицы. Как следствие, количество различных распределений k фермионов по n энергетическим уровням равно $\binom{n}{k}$. Наряду с фермионами существуют и частицы иного сорта — бозоны, для которых не существует ограничений на количество частиц, занимающих один и тот же уровень энергии. Для бозонов количество таких распределений равно, очевидно, $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.

4.2.6. К задачам раскладки неразличимых предметов по различимым ящикам, связанным с подсчетом количества k-сочетаний, сводятся также задачи о так называемом *разбиении* натурального числа k на n слагаемых. Данная задача формулируется следующим образом: сколькими способами можно представить натуральное число k в виде суммы n слагаемых вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k$$

при условии, что порядок слагаемых важен, то есть при условии, что разбиения вида

$$1 + 3 + 3 + 3 = 10 \qquad \text{и} \qquad 3 + 1 + 3 + 3 = 10$$

считаются различными?

Если на числа a_i накладывается единственное условие вида $a_i \geqslant 0$, то количество разбиений равно количеству $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ k-мультимножеств над n-элементным множеством. Действительно, в упорядоченной сумме $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ любой индекс i слагаемого a_i можно рассматривать как i-й ящик, в который мы складываем a_i единиц. Следовательно, эту задачу можно трактовать как задачу о раскладке k "неразличимых" единиц по n различимым ящикам.

Пример 4.10. Подсчитать количество разбиений числа $k = 4$ на два слагаемых:

$$a_1 + a_2 = 4, \qquad a_1, a_2 \geqslant 0.$$

Ответ: $\left(\!\binom{2}{4}\!\right) = \binom{5}{4} = 5$ разбиений: $0 + 4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1 = 4 + 0 = 4$.

К подсчету числа k-сочетаний из n элементов без повторений задача о разбиении числа k сводится в случае, когда на числа a_i накладываются следующие условия:

$$a_i = 0 \qquad \text{или} \qquad a_i = 1.$$

В этом случае индекс i также можно трактовать как i-й ящик; его можно выбрать (положив $a_i = 1$) или не выбрать (положив $a_i = 0$). Всего же нужно выбрать k таких ящиков. Это можно сделать $\binom{n}{k}$ способами.

Пример 4.11. Подсчитать количество разбиений числа 2 на три слагаемых при условии, что любое слагаемое может принимать значения 0 или 1.

Ответ: $\binom{3}{2} = 3$ разбиения: $1 + 1 + 0 = 1 + 0 + 1 = 0 + 1 + 1 = 2$.

4.2.7. Достаточно часто на практике встречаются ситуации, когда одну и ту же задачу можно свести и к урновой схеме, и к схеме раскладки предметов по ящикам.

Пример 4.12. В кондитерском магазине продаются пирожные трех разных видов. Сколькими различными способами можно купить семь пирожных?

Решение. Ответ в этой задаче, очевидно, равен $\left(\!\binom{3}{7}\!\right) = \binom{9}{7}$. Этот ответ можно, например, получить, представляя себе коробку с тремя отделениями, в каждое из которых кладется пирожное только одного вида; в этом случае мы сводим задачу к подсчету количества раскладок семи неразличимых предметов по трем различимым ящикам. Другой способ получить тот же ответ — это представлять себе урну, в которой находятся три разных пирожных, и считать количество способов выбора из урны семи пирожных с возвращениями любого выбранного пирожного обратно в урну. Наконец, можно вообще забыть о любых схемах, если понимать, что любые семь купленных пирожных трех различных видов представляют собой 7-мультимножество над 3-элементным множеством различных видов пирожных.

5 Подсчет количества отображений конечных множеств. Числа Стирлинга второго рода

5.1. Оказывается, задачи о раскладке различимых предметов по различимым же ящикам имеют и еще одну, чрезвычайно важную комбинаторную интерпретацию — они эквивалентны задачам о подсчете количества отображений конечных множеств.

5.1.1. Напомним определение произвольного отображения $f\colon X \to Y$.

Определение 5.1. Пусть X, Y — пара конечных множеств. Отображением f из X в Y называется правило, согласно которому любому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$:

$$\forall\, x \in X \qquad \exists!\, y \in Y\colon \qquad y = f(x).$$

С комбинаторной точки зрения любое отображение f из n-элементного множества X в k-элементное множество Y можно рассматривать как некоторый вариант раскладки n различимых предметов по k различимым ящиками при отсутствии каких-либо ограничений на количество предметов в каждом ящике.

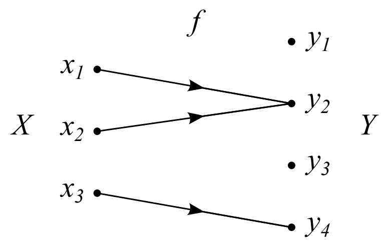


Рис. 6

Пример 5.2. Рассмотрим отображение f из трехэлементного множества X в четырехэлементное множество Y вида

$$f(x_1) = y_2, \qquad f(x_2) = y_2, \qquad f(x_3) = y_4$$

(смотри рис.6). Этому отображению отвечает раскладка трех различимых предметов по четырем различимым ящикам, при которой первые два предмета размещаются во втором ящике, а третий предмет — в четвертом ящике.

Как следствие, общее количество всех отображений n-элементного множества X в k-элементное множество Y равно k^n.

5.1.2. Напомним теперь определение *инъективного* отображения.

Определение 5.3. Отображение $f\colon X \to Y$ называется инъективным, если из условия

$$f(x_1) = f(x_2) \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = x_2.$$

Иными словами, отображение называется инъективным, если у любого элемента $y \in Y$ имеется не более одного прообраза, т.е. элемента $x \in X$, такого, что $y = f(x)$.

Понятно, что любому инъективному отображению $f\colon X \to Y$ отвечает такая раскладка n элементов множества X, при которой в каждом из k ящиков находится не более одного элемента. Как следствие, количество всевозможных инъективных отображений равно $(k)_n$.

5.1.3. Наконец, рассмотрим случай биективного и сюръективного отображений.

Определение 5.4. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *биективным,* если

$$\forall\, y \in Y \qquad \exists!\, x \in X\colon \qquad y = f(x).$$

Количество таких отображений равно, очевидно, $n!$, где $n = |X| = |Y|$.

Определение 5.5. Отображение $f\colon X \to Y$ называется сюръективным, если

$$\forall\, y \in Y \qquad \exists\, x \in X\colon \qquad y = f(x).$$

Другими словами, отображение f сюръективно, если у любого элемента $y \in Y$ найдется хотя бы один прообраз $x \in X$, то есть такой x, что $f(x) = y$.

Комбинаторная интерпретация сюръективного отображения такова: это есть некоторая раскладка n различимых предметов по k различимым ящикам при условии, что в каждом ящике находится хотя бы один предмет. Количество таких раскладок при $k > n$ равно, очевидно, нулю. Задача следующего пункта данного параграфа — сосчитать количество этих раскладок для случая $0 \leqslant k \leqslant n$.

5.2. Обозначим через $\widehat{S}(n,k)$ количество всех сюръективных отображений n-элементного множества X в k-элементное множество Y. Сосчитаем $\widehat{S}(n,k)$ для случая $n \geqslant 0$, $0 \leqslant k \leqslant n$.

5.2.1. Рассмотрим множество *всех* отображений из n-множества X в k-множество Y. Как мы знаем, количество таких отображений равно k^n. Наша задача состоит в том, чтобы подсчитать это количество по-другому, выразив k^n через числа $\widehat{S}(n,k)$.

5.2.2. Заметим, что *любое* отображение $f\colon X \to Y$ можно рассматривать как *сюръективное* отображение множества X на множество

$$\operatorname{Im}(f) = \{y \in Y \mid \exists x\colon\ y = f(x)\},$$

являющееся образом множества X при отображении f.

Так, для отображения f из примера 5.2 образ $\operatorname{Im}(f) = \{y_2, y_4\}$, а отображение $f\colon X \to Y$ является сюръективным отображением множества X на подмножество $\operatorname{Im}(f) \subset Y$.

5.2.3. Разобъем теперь все множество отображений $f\colon X \to Y$ на блоки, включив в i-й блок все отображения, образ $\operatorname{Im}(f)$ которых содержит ровно i элементов: $|\operatorname{Im}(f)| = i$, $i = 1, \ldots, k$. Все, что нам остается — это сосчитать количество элементов в каждом блоке, а затем воспользоваться правилом суммы для того, чтобы получить общее количество k^n всех отображений.

5.2.4. Заметим, что существует $\binom{k}{i}$ способов выбрать i-элементное подмножество k-множества Y. Для каждого из этих подмножеств имеется $\widehat{S}(n,i)$ различных сюръективных отображений из n-элементного множества X в выбранное i-элементное подмножество множества Y. Таким образом, по правилу произведения, общее количество элементов в i-м блоке равно

$$\binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i).$$

Тогда по правилу суммы можем записать, что

$$k^n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i). \tag{16}$$

При этом мы суммируем не от 1 до k, а от 0 до k, учитывая, что $\widehat{S}(n,0) = 0$ для всех $n > 0$.

Замечание 5.6. Формулу (16) полезно иногда записывать в виде

$$k^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i). \tag{17}$$

Несложно убедиться в том, что эта формула непосредственно следует из (16), а также в том, что она оказывается справедливой как для случая $n \geqslant k$, так и для случая $n < k$.

5.2.5. Мы выразили количество всех отображений n-элементного множества X в k-элементное множество Y через количество $\widehat{S}(n,i)$ сюръективных отображений. Нам же нужна обратная формула, выражающая количество $\widehat{S}(n,k)$ сюръективных отображений через число i^n всех отображений. Для ее получения воспользуемся так называемыми *формулами обращения.*

Утверждение 5.7. *Пусть* $(f_0, f_1, f_2, \ldots)$ *и* $(g_0, g_1, g_2, \ldots)$ *— две числовые последовательности, и пусть одна из них выражается через вторую по формулам*

$$f_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g_i, \qquad k \geqslant 0. \tag{18}$$

Тогда справедлива следующая формула обращения:

$$g_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_i, \qquad k \geqslant 0. \tag{19}$$

С учетом этих формул обращения можно, считая n параметром, из соотношения (16) получить следующую явную формулу для вычисления чисел $\widehat{S}(n,k)$:

$$\widehat{S}(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \cdot i^n.$$

5.3. Задачи подсчета количества отображений n-элементного множества X в k-элементное множество Y имеют еще одну важную комбинаторную интерпретацию.

5.3.1. Начнем с простого примера.

Пример 5.8. Для трехэлементного множества $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и двухэлементного множества $Y = \{y_1, y_2\}$ имеется, как мы знаем, $2^3 = 8$ различных отображений множества X в множество Y. Запишем все эти отображения как упорядоченные пары подмножеств множества X:

$$(\{x_1,x_2,x_3\},\varnothing), \qquad (\{x_1,x_2\},\{x_3\}), \qquad (\{x_1,x_3\},\{x_2\}), \qquad (\{x_2,x_3\},\{x_1\}),$$

$$(\{x_1\},\{x_2,x_3\}), \qquad (\{x_2\},\{x_1,x_3\}), \qquad (\{x_3\},\{x_1,x_2\}), \qquad (\varnothing,\{x_1,x_2,x_3\}).$$

Видно, что записанное в таком виде решение представляет собой не что иное, как список всех возможных *разделений* множества X, то есть упорядоченных разбиений X на два блока, один из которых может быть и пустым.

5.3.2. Очевидно, что данный результат справедлив и в общем случае. Именно, любое отображение $f\colon X \to Y$ задает нам некоторое разделение множества X, то есть разбиение этого множества на k упорядоченных блоков, часть из которых могут быть пустыми. Как следствие, количество таких разделений совпадает с количеством всех отображений f и равно k^n.

Аналогичные рассуждения показывают, что любое сюръективное отображение $f\colon X \to Y$ задает нам некоторое *упорядоченное разбиение* множества X на блоки. Поэтому количество всех упорядоченных разбиений n-элементного множества X на k блоков равно числу $\widehat{S}(n,k)$.

5.3.3. Рассмотрим теперь некоторый специальный вид k-разделений множества X, а именно, такие k-разделения, в которых в первом блоке содержится a_1 элемент, во втором блоке — a_2 элемента, в k-м блоке — a_k элементов. Очевидно, что при этом общая сумма всех элементов должна быть равна мощности $|X| = n$:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n, \qquad a_i \geqslant 0.$$

Утверждение 5.9. *Количество всех таких k-разделений n-множества X равно*

$$P(n; a_1, a_2, \ldots, a_k) := \binom{n}{a_1} \cdot \binom{n-a_1}{a_2} \cdot \ldots \cdot \binom{n - a_1 - a_2 - \ldots - a_{k-1}}{a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_k!}. \quad (20)$$

Доказательство. Действительно, из любого n-элементного множества X мы $\binom{n}{a_1}$ способами можем выбрать a_1 элементов и положить их в первый ящик (отнести к первому блоку разбиения). Затем для каждого такого выбора мы $\binom{n-a_1}{a_2}$ способами можем из оставшегося $(n - a_1)$-элементного множества выбрать a_2 элементов и положить их во второй ящик (отнести ко второму блоку разбиения), и так далее. Формула (20), описывающая общее количество способов совершить все эти действия, следует теперь из правила произведения. □

Следствие 5.10. *Общее количество k^n всех k-разделений n-множества X выражается через числа $P(n; a_1, a_2, \ldots, a_k)$ по формуле*

$$k^n = \sum_{\substack{a_1+a_2+\ldots+a_k=n \\ a_i \geqslant 0}} P(n; a_1, a_2, \ldots, a_k) = \sum_{\substack{a_1+a_2+\ldots+a_k=n \\ a_i \geqslant 0}} \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_k!}. \quad (21)$$

Замечание 5.11. Если в условии рассматриваемой задачи заменить нестрогие неравенства $a_i \geqslant 0$ на строгие, то есть на неравенства $a_i > 0$, то вместо разделения мы получим упорядоченное разбиение специального вида. Количество таких упорядоченных разбиений также описывается формулой (20), а вместо формулы (21) получается не менее полезное соотношение вида

$$\widehat{S}(n, k) = \sum_{\substack{a_1+a_2+\ldots+a_k=n \\ a_i > 0}} \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_k!}. \quad (22)$$

5.4. Числа $P(n; a_1, a_2, \ldots, a_k)$ имеют и еще один важный комбинаторный смысл. Именно, они перечисляют так называемые *перестановки n-множества X с повторениями.*

5.4.1. Рассмотрим в качестве элементарного примера следующую задачу: на полке имеются 15 различных книг по математике, 16 по информатике и 12 по физике; каково количество способов перестановки этих книг на полке? Ответ очевиден: $(15 + 16 + 12)! = 43!$ способов.

Предположим теперь, что мы перестали различать книги, посвященные одному и тому же предмету. В этом случае количество различных способов перестановки таких книг уменьшится. Обозначим это количество через λ_n. Так как существует 15! способов упорядочить книги по математике, 16! – по информатике и 12! – по физике, то по правилу произведения мы можем записать, что

$$43! = \lambda_n \cdot 16! \cdot 15! \cdot 12! \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_n = \frac{43!}{16! \cdot 15! \cdot 12!} = P(43; 15, 16, 12).$$

5.4.2. Аналогичные рассуждения справедливы и в общем случае. Именно, пусть среди n переставляемых предметов имеется a_1 неразличимых предметов первого сорта, a_2 неразличимых предметов второго сорта и так далее, причем $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$. Тогда для количества перестановок таких предметов с повторениями получаем уже знакомую нам формулу

$$\frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_k!} = P(n; a_1, a_2, \ldots, a_k).$$

5.4.3. В частном случае перестановки n предметов двух различных сортов получаем

$$P(n; k, n-k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Иными словами, количество таких перестановок совпадает с количеством различных k-элементных подмножеств n-элементного множества. Для комбинаторного доказательства данного факта можно воспользоваться рассуждениями, которые мы проводили при подсчете количества всех подмножеств данного множества. Напомним, что там мы любое подмножество кодировали упорядоченной битовой строкой длины n, состоящей из k единиц и $(n-k)$ нулей. Осталось заметить, что любая такая строка представляет собой некоторую перестановку k элементов первого сорта (единиц) и $(n-k)$ элементов второго сорта (нулей).

5.4.4. В заключение отметим еще одну полезную биекцию, позволяющую несколько по-другому сосчитать количество k-мультимножеств n-элементного множества. Мы знаем, что любому k-мультимножеству над n-множеством отвечает некоторая раскладка k неразличимых предметов по n различимым ящикам. В свою очередь, любую такую раскладку можно рассматривать как упорядоченный набор, состоящий из k неразличимых предметов одного сорта (например, k неразличимых шаров), и $(n-1)$-го предмета второго сорта ($(n-1)$-й неразличимой перегородки между этими шарами). Как следствие, количество всех k-мультимножеств

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = P(k+n-1; k, n-1) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!} = \binom{n+k-1}{k}.$$

5.5. Вернемся к числам $\widehat{S}(n,k)$, описывающим, в частности, количество всех упорядоченных разбиений n-множества на k блоков. Обозначим теперь через $S(n,k)$ количество обычных, неупорядоченных разбиений n-множества на k блоков. Так как для любого неупорядоченного разбиения существует $k!$ способов упорядочить k его блоков, то

$$\widehat{S}(n,k) = k!\, S(n,k).$$

Отсюда с учетом (16) и (22) получаем следующие две явные формулы, позволяющие вычислять числа $S(n,k)$:

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n = \frac{1}{k!}\sum_{\substack{a_1+a_2+\ldots+a_k=n\\ a_i>0}} \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_k!}. \tag{23}$$

Числа $S(n,k)$ называются *числами Стирлинга второго рода* и встречаются в большом количестве комбинаторных приложений. Исследуем эти числа поподробнее.

5.5.1. Для практического расчета чисел $S(n,k)$ удобно использовать рекуррентные соотношения.

Утверждение 5.12. *Числа Стирлинга второго рода удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:*

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k), \qquad k = 1,\dots,n; \tag{24}$$

$$S(0,0) = 1; \qquad S(n,0) = 0 \quad \forall\, n > 0; \qquad S(n,k) = 0 \quad \forall\, k > n.$$

Доказательство. Граничные условия $S(n,0) = 0$ для всех $n > 0$ и $S(n,k) = 0$ для всех $k > n$ очевидны — n-элементное множество в случае $n > 0$ нельзя разбить на 0 блоков, а также на k блоков в случае, когда $k > n$. Равенство $S(0,0) = 1$ введено просто для удобства.

Докажем теперь соотношение (24). Разобьем для этого множество всех k-разбиений на два блока. К первому блоку Σ_1 отнесем все разбиения, содержащие одноэлементное подмножество $\{x_1\}$. Ко второму блоку Σ_2 отнесем все оставшиеся k-разбиения, т.е. разбиения, в которых элемент x_1 входит в подмножества, содержащие как минимум два элемента.

Рассмотрим, к примеру, все 2-разбиения множества $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$:

$$\{\{x_1,x_2,x_3\},\{x_4\}\}, \quad \{\{x_1,x_2,x_4\},\{x_3\}\}, \quad \{\{x_1,x_3,x_4\},\{x_2\}\}, \quad \{\{x_2,x_3,x_4\},\{x_1\}\},$$

$$\{\{x_1,x_2\},\{x_3,x_4\}\}, \quad \{\{x_1,x_3\},\{x_2,x_4\}\}, \quad \{\{x_1,x_4\},\{x_2,x_3\}\}.$$

Для этого примера к первому блоку относится единственное разбиение вида $\{\{x_2,x_3,x_4\},\{x_1\}\}$. Остальные шесть разбиений относятся в данном случае ко второму блоку.

Довольно очевидно, что количество элементов в первом блоке равно количеству $S(n-1,k-1)$ всех $(k-1)$-разбиений оставшегося $(n-1)$-элементного множества. В примере это число равно $S(3,1) = 1$ — любое множество можно только одним способом разбить на один блок.

Для подсчета количества элементов во втором блоке заметим, что, по сути дела, это число равно количеству всевозможных разбиений $(n-1)$-элементного множества на k непустых подмножеств с поочередным добавлением элемента x_1 в каждое из этих подмножеств. Действительно, для разобранного выше примера имеется три разбиения трехэлементного множества $\{x_2, x_3, x_4\}$ на два непустых подмножества, а именно, разбиения вида

$$\{\{x_2\},\{x_3,x_4\}\}, \quad \{\{x_3\},\{x_2,x_4\}\}, \quad \{\{x_4\},\{x_2,x_3\}\}.$$

Добавляя к каждому из этих подмножеств элемент x_1, получим $2 \cdot 3 = 6$ выписанных выше разбиений четырехэлементного множества X на блоки требуемого вида. Количество таких разбиений в общем случае равно, очевидно, $k \cdot S(n-1,k)$. □

5.5.2. Как и биномиальные коэффициенты, числа Стирлинга второго рода удобно представлять в виде треугольного массива на плоскости (n,k). На рис.7 показаны первые несколько строк такого массива, вычисленных с помощью рекуррентных соотношений (24). Такой рисунок дает нам еще одну комбинаторную интерпретацию чисел $S(n,k)$ — это есть количество *взвешенных* путей, идущих из начала координат в точку с координатами (n,k).

5.5.3. Числа Стирлинга второго рода встречается в очень большом количестве самых разнообразных задач. В качестве примера вернемся к формуле (17) и перепишем ее через числа Стирлинга второго рода:

$$k^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \cdot i! \cdot S(n,i) = \sum_{i=0}^{n} (k)_i \cdot S(n,i). \tag{25}$$

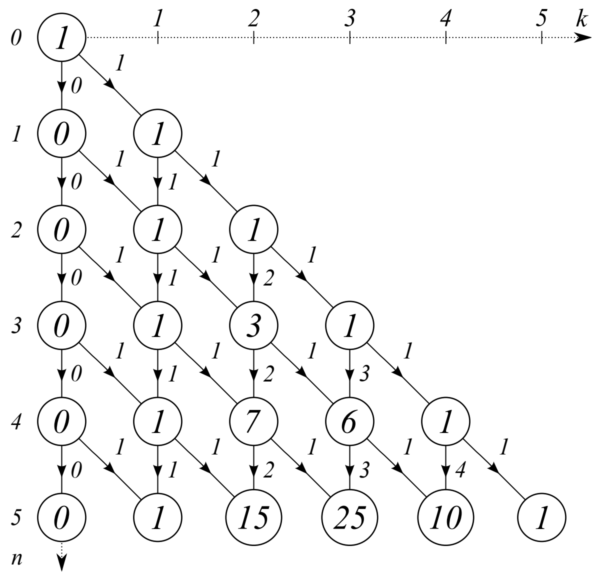


Рис. 7: Графическое представление чисел $S(n, k)$

Оказывается, эта формула справедлива для любых вещественных и даже комплексных значений k. Именно, справедливо равенство

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} (x)_i \cdot S(n, i).$$

Эта формула активно используется в теории конечных операторов — она позволяет перейти от базиса x^n к базису $(x)_n$.

5.5.4. С точки зрения схемы раскладки предметов по ящикам числа Стирлинга второго рода описывают количество способов разложить n различимых предметов по k неразличимым ящикам так, чтобы в любом ящике содержался хотя бы один предмет. Сосчитаем, зная $S(n, k)$, количество $B(n, k)$ различных раскладок n различимых предметов по k неразличимым ящикам в случае, когда ограничения на количество предметов в любом ящике отсутствуют.

Для этого вновь разобьем множество всех таких раскладок на блоки, поместив в i-й блок все раскладки, в которых занято ровно i ящиков. В случае различимых ящиков в процессе аналогичного разбиения множества на блоки мы в i-м блоке имели $\binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n, i)$ элементов. В случае неразличимых ящиков мы i из k ящиков выбираем ровно одним способом, а затем $S(n, i)$ способами заполняем эти ящики n предметами. Используя правило суммы, получаем отсюда следующее выражение для чисел $B(n, k)$:

$$B(n, k) = \sum_{i=1}^{k} S(n, i).$$

5.5.5. Числа $B(n, k)$ в случае $n = k$ называются числами Белла $B(n)$. Эти числа перечисляют количество *всех* возможных разбиений n-элементного множества X.

Заметим, что любое разбиение множества X можно получить, введя на этом множестве некоторое отношение эквивалентности. Как следствие, количество всех возможных отношений эквивалентности на n-элементном множестве X описывается числами Белла B_n.

5.5.6. Покажем, что для чисел Белла $B(n)$ справедливо следующее рекуррентное соотношение:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k. \qquad (26)$$

Действительно, рассмотрим блок разбиения $(n+1)$-элементного множества, содержащий число $n+1$. Все возможные разбиения мы можем разбить на $n+1$ группу (блок) в зависимости от того, сколько чисел содержится вместе с $n+1$. Предоположим, что вместе с $n+1$ находятся i чисел, $i = 0, \ldots, n$. Эти числа мы можем выбрать $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$ способами. Оставшиеся $k = n - i$ чисел, $k = 0, \ldots, n$, мы можем $B(k)$ способами разбить на блоки. Суммируя по всем k, мы и получим формулу (26).

5.6. Подведем итоги, построив таблицу различных схем раскладок n предметов по k ящикам:

Элементы множества X (предметы)	Элементы множества Y (ящики)	Произвольное количество предметов в ящике	Не более 1 предмета в ящике	Как минимум 1 предмет в ящике
различимые	различимые	k^n	$(k)_n$	$\widehat{S}(n,k)$
неразличимые	различимые	$\left(\!\binom{k}{n}\!\right)$	$\binom{k}{n}$	$\binom{n-1}{k-1}$
различимые	неразличимые	$B(n,k)$	$0, \quad n > k$ $1, \quad n \leqslant k$	$S(n,k)$

6 Рекуррентные соотношения

6.1. Мы уже несколько раз получали решения комбинаторных задач, записанные в виде тех или иных рекуррентных соотношений. Настало время поговорить о них немного поподробнее.

6.1.1. Начнем с простого примера [**?**].

Пример 6.1. Популяция лягушек в озере увеличивается в четыре раза каждый год. В последний день каждого года 100 лягушек отлавливают и переправляют на другие озера. Предполагая, что в начале первого года в озере было 50 лягушек, найти количество лягушек в начале любого последующего года.

Решение. Обозначим через a_n количество лягушек в начале $(n+1)$-го года. По условию задачи, $a_0 = 50$. Тогда, очевидно,

$$a_1 = 4 \cdot 50 - 100 = 100, \qquad a_2 = 4 \cdot 100 - 100 = 300,$$

а в общем случае

$$a_{n+1} = 4 \cdot a_n - 100, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Полученное равенство является простейшим примером *рекуррентного соотношения.*

6.1.2. Перейдем теперь к формальным определениям.

Определение 6.2. Пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — произвольная числовая последовательность. Если для любого $n \geqslant 0$ число a_{n+m} является некоторой функцией от m предыдущих членов последовательности, т.е.

$$a_{n+m} = f_n(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+m-1}), \tag{27}$$

то такая последовательность называется рекуррентной последовательностью, а соотношение (27) — рекуррентным соотношением m-го порядка.

В частном случае линейной функции f имеем так называемое *линейное рекуррентное соотношение*

$$a_{n+m} = b_1(n)\, a_{n+m-1} + b_2(n)\, a_{n+m-2} + \ldots + b_{m-1}(n)\, a_{n+1} + b_m(n)\, a_n + u(n). \tag{28}$$

В случае $u(n) = 0$ оно называется *однородным,* в противном случае — *неоднородным.*

Самый простой случай рекуррентного соотношения (28) — это *линейное однородное рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами*

$$a_{n+m} = b_1\, a_{n+m-1} + b_2\, a_{n+m-2} + \ldots + b_{m-1}\, a_{n+1} + b_m\, a_n. \tag{29}$$

Очевидно, что для однозначного определения всех a_n необходимо наряду с самим рекуррентным соотношением (27) задать и первые m членов $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ данной последовательности, то есть, как говорят, *задать начальные условия* для рекуррентного соотношения.

6.1.3. Итак, наличие рекуррентного соотношения и начальных условий позволяет нам последовательно, шаг за шагом, определить любое наперед заданное количество n членов рекуррентной числовой последовательности. Зачастую это все, что нам требуется от задачи. Иными словами, получение рекуррентного соотношения для искомой числовой последовательности a_n является вполне приемлемым, а зачастую — и наиболее удобным с вычислительной точки зрения ответом для поставленной комбинаторной задачи.

Однако иногда нам полезно иметь явную формулу, которая для любого n позволяет вычислять значение a_n. Такую формулу называют *решением* рассматриваемого рекуррентного соотношения. Мы в данном параграфе покажем, как строить такие решения для случая линейного однородного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами (29).

6.2. Прежде чем рассматривать общий случай уравнения (29), рассмотрим наиболее простой его вариант — линейное однородное рекуррентное соотношение первого порядка

$$a_{n+1} = b_1 \cdot a_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \qquad a_0 \text{ — заданное число.} \tag{30}$$

6.2.1. Решение этого уравнения построить легко. Действительно,

$$a_1 = b_1 \cdot a_0; \qquad a_2 = b_1 \cdot a_1 = b_1^2 \cdot a_0; \qquad \ldots \qquad a_n = b_1^n \cdot a_0.$$

6.2.2. Предположим теперь, что нам кто-то сразу подсказал вид решения, а именно, что решение нашего уравнения (30) степенным образом зависит от n:

$$a_n = r^n \qquad \text{для некоторого } r.$$

Воспользовавшись этой подсказкой, подставим это выражение в исходное рекуррентное соотношение (30). В результате получается равенство вида

$$r^{n+1} = b_1 \cdot r^n,$$

из которого сразу же следует, что $r = b_1$; при этом a_n оказывается равным b_1^n. Это означает, что при $n = 0$ число $a_0 = b_1^0 = 1$. Иными словами, $a_n = b_1^n$ есть решение исходной задачи (30) в частном случае $a_0 = 1$. Поэтому такое решение называется *частным решением* уравнения (30).

6.2.3. Теперь попытаемся, зная частное решение, построить общее решение задачи (30). Для этого заметим, что в силу однородности уравнения (30) любое его частное решение, умноженное на произвольную постоянную c, по-прежнему этому уравнению удовлетворяет:

$$c \cdot b_1^{n+1} \equiv c \cdot b_1 \cdot b_1^n.$$

Решение же вида $c \cdot b_1^n$ позволяет удовлетворить любому начальному условию. Действительно, подставляя его в начальное условие для уравнения (30), получим:

$$c \cdot b_1^0 = a_0 \qquad \Longrightarrow \qquad c = a_0 \qquad \Longrightarrow \qquad a_n = a_0 \cdot b_1^n.$$

По этой причине решение вида $c \cdot b_1^n$ называется *общим решением* уравнения (30).

6.3. Подведем предварительные итоги. Так как исходное уравнение (30) было очень простым, то нам удалось сразу построить его решение и выяснить, что оно степенным образом зависит от параметра n. Затем мы заметили, что если бы нам кто-то заранее подсказал степенной характер решения уравнения (30), то нам хватило бы этой информации для построения как общего, так и частного решения нашего рекуррентного уравнения.

Возникает вопрос: зачем же нам нужен для столь простого уравнения столь сложный алгоритм построения его решения? Оказывается, что этот алгоритм практически без изменений работает и для построения решения линейного однородного уравнения произвольного порядка.

6.3.1. Рассмотрим в качестве примера линейное однородное рекуррентное соотношение второго порядка

$$a_{n+2} = b_1 \cdot a_{n+1} + b_2 \cdot a_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad a_0,\ a_1 \text{ — заданные числа}, \tag{31}$$

и попытаемся применить к этому уравнению алгоритм, описанный в конце предыдущего пункта.

Для этого предположим, что частное решение уравнения (31) по прежнему степенным образом зависит от параметра n, то есть предположим, что существуют такие значения параметров a_0 и a_1, при которых $a_n = r^n$. Подставляя это выражение в рекуррентное соотношение, получим

$$r^{n+2} = b_1 \cdot r^{n+1} + b_2 \cdot r^n \qquad \Longrightarrow \qquad r^2 - b_1 r - b_2 = 0, \tag{32}$$

т.е. квадратное уравнение на r. Любое его решение r_0 дает нам некоторое частное решение уравнения (31). По этой причине данное уравнение называется *характеристическим уравнением* для рекуррентного соотношения (31).