„Теоретико-сложностные основы криптографии“. Заметки к курсу в СПбАУ

А.В. Смаль

5 мая 2018 г.

Аннотация

Курс посвящён изучению теоретических оснований, на которых строится надёжность криптографических протоколов.

Содержание

Введение

Мы будем предполагать, что алгоритмы шифрования/дешифрования всем известны (т.е. no security by obscurity).

1. Совершенная надёжность

Определение 1.1. *Система шифрования с закрытым ключом* — это пара алгоритмов $E(k, m)$ и $D(k, c)$, такая, что для любых k и m выполняется $D(k, E(k, m)) = m$. Система называется *совершенно надёжной*, если для любых двух сообщений m_1 и m_2 случайные величины $E(k, m_1)$ и $E(k, m_2)$ при $k \leftarrow \mathcal{U}(K)$ распределены одинаково ($\mathcal{K}$ — пространство ключей).

Замечание 1.1. Система шифрования с одноразовым шифроблокнотом является совершенно надёжной.

Замечание 1.2. Для совершенной надёжности необходимо, чтобы длина ключа была не менее длины сообщения.

Теорема 1.1. *Пусть $P = NP$. Тогда для любой системы шифрования с закрытым ключом (E, D) с полиномиальным алгоритмом E, в которой $|m| > |k|$, существуют сообщения m_0 и m_1 и полиномиальный алгоритм A, для которого*

$$\left|\Pr_k[A(E(k, m_0)) = 1] - \Pr_k[A(E(k, m_1)) = 1]\right| \geq \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Не уменьшая общности предположим, что $\mathcal{K} = \{0,1\}^{n-1}$. Возьмём в качестве $m_0 = 0^n$. Пусть $S = \{E(k, 0^n) \mid k \in \mathcal{K}\}$. Легко видеть, что $S \in NP$ и $|S| \leq 2^{n-1}$. Возьмём в качестве алгоритма A полиномиальный разрешающий алгоритм для S, т.е. $A(y) := [y \in S]$ (он существует по предположению $P = NP$).

Для каждого сообщения m рассмотрим $t_m = \big|\{k \mid E(k, m) \in S\}\big|$. Если существует сообщение m^*, для которого $t_{m^*} \leq 2^{n-1}$, то $m_1 = m^*$ удовлетворяет требованиям.

Предположим теперь, что $t_m > 2^{n-2}$ для любого m. Это значит, что существуют более $2^{n-2} \cdot 2^n = 2^{2n-2}$ пар ключ-сообщение (k, m), для которых $E(k, m) \in S$. Следовательно, для некоторого $y \in S$ существует более $2^{2n-2}/|S| \geq 2^{n-1}$ пар $(k, m) : E(k, m) = y$, т.е. существуют ключ k и два различных сообщения m' и m'': $E(k, m') = E(k, m'')$. Это противоречит корректности системы шифрования. □

2. Односторонние функции

Доказывать надёжность криптографических протоколов без каких-либо предположений, к сожалению, не получается — из такого доказательства следовало бы $P \neq NP$. Было бы здорово показать, что криптография возможна, если $P \neq NP$, но это тоже не получается сделать. Поэтому в дальнейшем мы будем отталкиваться от более сильного предположение — предположения о существовании *односторонней функции*.

В дальнейшем мы будем рассматривать семейства функций $f_n : \{0,1\}^{k(n)} \to \{0,1\}^{l(n)}$, где $k(n)$ и $l(n)$ будут некоторыми полиномами. Кроме того, нас почти всегда будут интересовать функции, которые можно вычислить за полиномиальное время.

Определение 2.1. Семейство функций $f_n : \{0,1\}^{k(n)} \to \{0,1\}^{l(n)}$ называется *полиномиально вычислимым*, если имеется алгоритм, который получая на вход число n и x длины $k(n)$ вычисляет $f_n(x)$ за полиномиальное от n время.

2.1. Односторонние функции с худшем случае

Определение 2.2. Полиномиально вычислимое семейство функций $f_n : \{0,1\}^{k(n)} \to \{0,1\}^{l(n)}$ называется *односторонним в худшем случае*, если не существует полиномиально вычислимой функции g_n, что для любого $x \in \{0,1\}^{k(n)}$ верно $f_n(g_n(f_n(x))) = f_n(x)$.

Теорема 2.1. *Односторонние функции с худшем случае существуют* $\iff$ $P \neq NP$.

Доказательство.

- $\Rightarrow$ Пусть $P = NP$. Определим язык $L = \{(1^n, y, z) \mid \exists x, |x| = k(n), z \sqsubset x, f_n(x) = y\}$, $L \in NP$. По предположению для L существует полиномиальный разрешающий алгоритм. Для нахождения прообраза y запустим этот алгоритм сначала на слове $(1^n, y, \lambda)$, где λ — пустая строка. Если это слово не принадлежит L, то y не имеет прообраза. В противном случае восстановим прообраз y по битам: сначала запустим алгоритм для слова $(1^n, y, 0)$ и проверим, есть ли у y прообраз начинающийся с нуля. Далее аналогично восстановим второй и все последующие биты. Нам потребуется $k(n) + 1$ запуск полиномиального алгоритма, т.е. прообраз можно найти алгоритмически за полиномиальное время.
- $\Leftarrow$ Если $P \neq NP$, то можно построить одностороннюю в худшем на основе любой NP-трудной задачи. Пусть $R(x, y)$ — это отношение, задающее NP-трудную задачу S (например, для $S = SAT$: $R(\phi, a) = 1 \iff \phi(a) = 1$). Пусть $f_n(x, y) = (x, R(x, y))$. Если f_n^{-1} вычисляется за полиномиальное время, то и задачу S можно решить за полиномиальное время, вычислив $f^{-1}(x, 1)$.

□

2.2. Односторонние функции для алгоритмов

Мы будем определять *односторонние функции* (one-way function, owf) для противника, который является вероятностным полиномиальным алгоритмом, т.е. для *равномерного противника.*

Определение 2.3. Полиномиально вычислимое семейство f_n называется *слабо односторонним для равномерного противника*, если **существует** такой полином p, что для любого полиномиального вероятностного алгоритма R при всех достаточно больших n

$$\Pr_{x,R}[f_n(R(1^n, f_n(x))) = f_n(x)] < 1 - \frac{1}{p(n)}.$$

Определение 2.4. Полиномиально вычислимое семейство f_n называется *сильно односторонним для равномерного противника*, если **для любого** полинома q, что для любого полиномиального вероятностного алгоритма R при всех достаточно больших n

$$\Pr_{x,R}[f_n(R(1^n, f_n(x))) = f_n(x)] < \frac{1}{q(n)}.$$

2.3. Односторонние функции для неравномерного противника

Аналогичным образом можно определить односторонние функции для противника, являющегося последовательностью схем, т.е. для *неравномерного противника.*

Определение 2.5. Полиномиально вычислимое семейство f_n называется *слабо односторонним для неравномерного противника*, если **существует** такой полином p, что для любой последовательности схем C_n полиномиального размера при всех достаточно больших n

$$\Pr_x[f_n(x) = f_n(C_n(f_n(x)))] < 1 - \frac{1}{p(n)}.$$

Определение 2.6. Полиномиально вычислимое семейство f_n называется *сильно односторонним для неравномерного противника*, если **для любого** полинома q, что для любой последовательности схем C_n полиномиального размера при всех достаточно больших n

$$\Pr_x[f_n(x) = f_n(C_n(f_n(x)))] < \frac{1}{q(n)}.$$

Замечание 2.1. Односторонние функции для неравномерного противника можно было бы определять для *вероятностных* схем, т.е. для схем, которым на вход подают не только $f_n(x)$, но и некоторую строку со случайными битами r. Однако, легко показать, что от случайных битов в таких определениях можно избавиться: для этого нужно для каждого n выбрать одну "самую лучшую" строку r_n, на которой достигается максимальная вероятность обращения f_n и "зашить" её в схему. Нетрудно увидеть, что вероятность обращения при $r = r_n$ будет не меньше, чем по всем r в среднем.

В дальнейшем мы часто будем говорить про односторонние *функции*, подразумевая под этим *семейства* односторонних функций. Когда говорят про *одностороннюю функцию*, то имеется в виду сильно односторонняя функция.

Определение 2.7. Если в определении односторонней функции убрать требование полиномиальной вычислимости, то получится определение *необратимой* функции.

2.4. Примеры односторонних функций

Неизвестно, существуют ли односторонние или хотя бы слабо односторонние функции (даже для равномерного противника). Доказательство их существования повлечёт за собой $P \neq NP$.

Теорема 2.2. *Если $P = NP$, то любое полиномиально вычислимое семейство функций f_n не является слабо необратимым даже для равномерного противника. Более того, существует детерминированный алгоритм, который для всех x по n и $f_n(x)$ за полиномиальное от n время находит некоторый прообраз $f_n(x)$ длины $k(n)$.*

Доказательство. См. пункт "⇒" доказательства теоремы 2.1. □

Пример 2.1 (произведение натуральных чисел). Семейство f_n устроено следующим образом: $k(n) = l(n) = 2n$, вход x делится пополам, каждая половинка представляет собой n-битовое число, результат f_n — произведение этих чисел (получится не более чем $2n$-битовое число).

Пример 2.2 (SUBSET-SUM). Семейство f_n для SUBSET-SUM устроено следующим образом: $k(n) = n^2 + n$, $l(n) = n^2 + 2n + \lceil \log n \rceil$, вход x разбивается на $n + 1$ блок длины n, первые n блоков интерпретируются как n-битовые числа $x_1, \ldots, x_n$, а последний блок интерпретируется как подмножество $[n]$. Тогда $f_n(x) = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n, \sum_{i \in I} x_i \rangle$.

2.5. Построение сильно односторонних функций из слабо односторонних

Теорема 2.3. *Если существуют слабо односторонние функции, то существуют и сильно односторонние функции (это верно для любых противников).*

Доказательство. Будем доказывать для равномерного противника — для неравномерного доказательство будет аналогичным. Пусть f — слабо односторонняя функция, т.е. существует такой полином p, что для любого полиномиального вероятностного алгоритма R при всех достаточно больших n

$$\Pr_{x,r}[f_n(x) = f_n(R(1^n, f_n(x), r))] < 1 - \frac{1}{p(n)}.$$

Определим функцию F, которая определяется следующим соотношением:

$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \langle f_n(x_1), f_n(x_2), \ldots, f_n(x_N)\rangle,$$

т.е. $F_n : \{0,1\}^{N\cdot k(n)} \to \{0,1\}^{N\cdot l(n)}$. Для того, чтобы обратить F_n нам нужно N раз обратить функцию f_n. В каждом случае вероятность ошибки не меньше $1/p(n)$, поэтому общая вероятность успеха не более $\big(1 - 1/p(n)\big)^N$. Для $N = n \cdot p(n)$ эта вероятность близка к e^{-n}, что убывает быстрее любого обратного полинома. Таким образом функция F — сильно односторонняя.

В предыдущем рассуждении кроется ошибка. Дело в том, что мы предполагаем, что обращающий алгоритм будет обязательно устроен следующим образом: он будет пытаться N раз обратить f_n, т.е. найти прообразы для $f_n(x_1), f_n(x_2), \ldots, f_n(x_N)$. Это не обязательно так — мы не можем предполагать, что этот алгоритм будет устроен каким-то конкретным образом. Поэтому предыдущее доказательство ошибочное, хотя получившаяся функция F действительно сильно односторонняя.

Корректное доказательство этого факта будет устроено другим образом. Мы предположим, что функция F не является сильно односторонней и из этого покажем, что в свою очередь функция f не является слабо односторонней. Для этого мы воспользуемся алгоритмом, который обращает F, для построения алгоритма обращения f. Предположим, что алгоритм R_F умеет обращать F с вероятностью успеха более $1/q(n)$ для некоторого полинома q. Тогда мы покажем, что существует алгоритм R_f, который обращает f с вероятностью успеха более $1 - 1/p(n)$.

Алгоритм R_f мог бы быть устроен так: для обращения y мы выберем случайные $x_2, x_3, \ldots, x_N$ и запустим алгоритм R_F на входе $\langle y, f_n(x_2), f_n(x_3), \ldots, f_n(x_N)\rangle$. Действительно, если R_F найдёт прообраз для этого входа, то он в т.ч. найдёт и прообраз для y. Вероятность успеха R_F на таком входе для случайного y не менее вероятности успеха R_F для случайных $x_1, \ldots, x_N$. Однако нам этого недостаточно — мы хотели бы получить вероятность успеха близкую к единице.

Для этого будем использовать два дополнительных приёма:

- будем пытаться подставить y не только на место $f_n(x_1)$, а для каждого i будем запускать алгоритм R_F на входе $\langle f_n(x_1), \ldots, f_n(x_{i-1}), y, f_n(x_{i+1}), \ldots, f_n(x_N)\rangle$ для случайных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N$;[1]
- будем повторять каждую итерацию M раз для различных случайных независимых наборов $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N$.

[1] Этот приём необходим, т.к. в противном случае у нас не получится увеличивать вероятность успеха. Действительно, если представить, что алгоритм R_F не работает на строках, у которых первый бит нулевой, то вероятность успеха такого алгоритма вполне может быть $1/2$. Но тогда и вероятность успеха R_f не может быть выше $1/2$.

Давайте выделим один *раунд* алгоритма R_f: для каждого i выбирается независимый случайный набор входов $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N$ и вызывается алгоритм R_F на входе $\langle f_n(x_1), \ldots, f_n(x_{i-1}), y, f_n(x_{i+1}), \ldots, f_n(x_N)\rangle$. Этот этап будет повторён M раз. Значение M мы выберем позже, это будут некоторый полином от n.

Через $s_i(x)$ мы будем обозначать вероятность того, что алгоритм R_F найдёт прообраз $\langle f_n(x_1), \ldots, f_n(x_{i-1}), f_n(x), f_n(x_{i+1}), \ldots, f_n(x_N)\rangle$ для случайных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N$. Через $\hat{s}(x)$ обозначим вероятность успеха одного раунда алгоритма R_f. Эта вероятность заведомо не меньше максимальной вероятности среди всех $s_i(x)$, т.е. $\hat{s}(x) \geq \max_i s_i(x)$.

Рассмотрим отдельно входы x, которые наш алгоритм R_f обращает с маленькой вероятностью, т.е. это "трудные" для обращения входы. Будем говорить, что x — трудный, если $\hat{s}(x) < \epsilon$ для некоторого обратного полинома ϵ, который мы выберем дальше. Долю трудных "трудных" слов среди всех слов длины n мы обозначим через δ, т.е. $\delta = \Pr_{x \leftarrow U_n}[\hat{s}(x) < \epsilon]$.

Дальнейшее доказательство будет построено так: мы предположим, что получившийся алгоритм R_f не обращает функцию f с нужной вероятностью, т.е. вероятность его ошибки большее $1/p(n)$. Из этого будет следовать, что доля трудных слов δ довольно большая (больше некоторого обратного полинома). А раз трудных слов много, то и вероятность успеха R_F не может быть больше $1/q(n)$. Таким образом мы придём к противоречию. Для реализации этого плана потребуется следующие две леммы.

Лемма 2.1. *Вероятность ошибки R_f при обращении слова $f_n(x)$ для случайного x не больше $\delta + (1-\epsilon)^M$.*

Доказательство. По формуле полной вероятности вероятность ошибки R_f при обращении слова $f_n(x)$ для случайного x можно расписать как вероятность ошибки на "трудных" входах и на простых входах.

$$\begin{aligned}\Pr_{x,r}[\text{ошибка } R_f] &= \Pr_r[\text{ошибка } R_f \mid \hat{s}(x) < \epsilon] \cdot \Pr_x[\hat{s}(x) < \epsilon] \\ &+ \Pr_r[\text{ошибка } R_f \mid \hat{s}(x) \geq \epsilon] \cdot \Pr_x[\hat{s}(x) \geq \epsilon] \\ &\leq 1 \cdot \delta + (1-\epsilon)^M \cdot 1.\end{aligned}$$

□

Лемма 2.2. *Вероятность успеха алгоритма R_F при обращении слова $F(\bar{x})$ для случайного $\bar{x} = x_1, \ldots, x_N$ не больше $N\delta\epsilon + (1-\delta)^N$.*

Доказательство. Оценим вероятность успеха сверху по формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned}\Pr_{\bar{x},r}[\text{успех } R_F] &= \Pr_r[\text{успех } R_F \mid \exists i, \hat{s}(x_i) < \epsilon] \cdot \Pr_{\bar{x}}[\exists i, \hat{s}(x_i) < \epsilon] \\ &+ \Pr_r[\text{успех } R_F \mid \forall i, \hat{s}(x_i) \geq \epsilon] \cdot \Pr_{\bar{x}}[\forall i, \hat{s}(x_i) \geq \epsilon] \\ &\leq \epsilon \cdot N\delta + 1 \cdot (1-\delta)^N.\end{aligned}$$

□

Предположим теперь, что у получившегося алгоритма R_f вероятность ошибки больше, чем $1/p(n)$, т.е. R_f обращает f с вероятностью успеха меньше $1 - \frac{1}{p(n)}$. Положим $M = n/\epsilon$. Тогда второе слагаемое в лемме 2.1 будет порядка e^{-n}, что при при достаточно больших n меньше, чем $\frac{1}{2p(n)}$. Таким образом $\delta > \frac{1}{2p(n)}$.

Теперь мы хотим определить N и ϵ так, чтобы вероятность успеха R_F оказалась меньше, чем $1/q(n)$. Выберем $N = n \cdot p(n)$, тогда при $\delta > \frac{1}{2p(n)}$ мы получаем, что второе слагаемое в лемме 2.2 будет порядка $e^{-n/2}$:

$$(1-\delta)^N < \left(1 - \frac{1}{2p(n)}\right)^{n \cdot p(n)} = \left[\left(1 - \frac{1}{2p(n)}\right)^{2p(n)}\right]^{n/2} \approx e^{-n/2}.$$

При достаточно больших n это меньше, чем $\frac{1}{2q(n)}$. Осталось определить ϵ так, чтобы и первое слагаемое лемме 2.2 было меньше $\frac{1}{2q(n)}$. Например, это достигается при

$$\epsilon = \frac{1}{2N \cdot q(n)} = \frac{1}{2n \cdot p(n) \cdot q(n)}.$$

При таким M, N и ϵ получается, что алгоритм R_f вызовет полиномиальный алгоритм R_F не более $M \cdot N = 2n^3 \cdot p^2(n) \cdot q(n)$ раз, т.е. R_f сам по себе будет полиномиальным.

□

2.6. Частичные односторонние функции

Односторонние функции, которые мы определили выше, определены для всех слов длины $k(n)$. Можно обобщить это определение на случай частичных функций, которые определены на некотором $D_n \subset \{0,1\}^{k(n)}$. Для того, чтобы такие функции можно было применять для построения криптографических протоколов, мы дополнительно потребуем возможности генерировать *почти* равномерное распределение на D_n.

Определение 2.8. Последовательность распределений вероятностей μ_n на множестве двоичных слов называется *полиномиально моделируемой*, если существует полиномиальный вероятностный алгоритм K, такой, что для всех $x \in \{0,1\}^*$

$$\Pr_r[K(1^n, r) = x] = \mu_n(x).$$

Определение 2.9. *Статистическим расстоянием* между распределениями вероятностей μ и ν называется

$$\delta(\mu, \nu) = \max_{A \subset \{0,1\}^*} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

Не сложно показать, что максимум достигается при A равном $\{x \mid \mu(x) > \nu(x)\}$ и его дополнению. Таким образом

$$\delta(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_x |\mu(x) - \nu(x)|.$$

Определение 2.10. Последовательности распределений μ_n и ν_n называются *статистически неотличимыми*, если статистическое расстояние между ними стремится к нулю быстрее любого обратного полинома от n при $n \to \infty$.

Определение 2.11. Случайные величины α_n и β_n называются *статистически неотличимыми*, если их распределения $\mu_n(x) = \Pr[\alpha_n = x]$ и $\nu_n(x) = \Pr[\beta_n = x]$ статистически неотличимы.

Определение 2.12. Распределение μ_n называется *доступным*, если оно статистически неотличимо от некоторого полиномиально моделируемого распределения ν_n.

Определение 2.13. Семейство частичных функций f_n с областями определения D_n называется *сильно односторонним*, если f_n полиномиально вычислимо, равномерное распределение на D_n доступно, и для любого полинома q и для любого полиномиального вероятностного алгоритма R,

$$\Pr_{x \leftarrow D_n, r}[f_n(x) = f_n(R(1^n, f_n(x), r))] < \frac{1}{q(n)}$$

при всех достаточно больших n. Сильно одностороннее семейство частичных функций f_n называется *сильно односторонней перестановкой* (one-way permutation, owp), если для всех n оно является перестановкой своей области определения D_n.

Аналогичным образом определяются *слабо односторонние* функции и *односторонние функции* для неравномерного противника.

Пример 2.3 (Предположительно сильно односторонние частичные функции).

1. *Функция Рабина.* Функция f_n определена на словах вида xy длины $4n$, где $|x| = |y| = 2n$. При этом x и y интерпретируются как $2n$-битовые числа, удовлетворяющих следующим требованиям:

   (a) $y = p \cdot q$, где p и q простые n-битовые числа вида $4k + 3$;

   (b) $x = z^2 \bmod y$ для некоторого z, взаимно простого с y.

   Значение функции на xy равно конкатенации слов $x^2 \bmod y$ и y.

2. *Функция RSA.* Функция RSA является обобщением функции Рабина. Она определена на словах вида xyz, где x, y и z имеют длину $2n$ и интерпретируются как двоичные записи чисел, удовлетворяющие следующим требованиям:

   (a) $y = p \cdot q$, где p и q простые n-битовые числа;

   (b) $x \in [1, pq - 1]$ и взаимно просто с y;

   (c) z взаимно просто $\phi(pq) = (p - 1) \cdot (q - 1)$.

   Значение функции на xyz равно конкатенации слов $(x^z \bmod y)$, y и z.

3. *Дискретная экспонента.* Функция определена на словах вида xyz, где x, y и z имеют длину n и соответствующие числа удовлетворяют следующим требованиям:

   (a) y — n-битовое простое число,

   (b) $x \in [2, y - 1]$, порождает всю мультипликативную группу вычетов по модулю y (т.е. любой ненулевой вычет является степенью x),

   (c) $z \in [1, y - 1]$.

   Значение функции на xyz равно конкатенации слов x, y и $(x^z \bmod y)$. Обращение этой функции — является дискретным логарифмированием.

Более подробно об этих примерах см. [1].

Определение 2.14. Частичная функция $f_n : \{0,1\}^{k(n)} \to \{0,1\}^{l(n)}$ называется *проверяемой*, если по n, любому слову x длины $k(n)$ и любому слову y из множества значений f_n можно за полиномиальное время проверить, верно ли, что f_n определена на x и её значение на x равно y.

Замечание 2.2. Неизвестно, является ли функция Рабина проверяемой, т.к. неясно, как за полиномиальное время проверить, является ли данное число квадратичным вычетом по составному модулю.

3. Генераторы псевдослучайных чисел

3.1. Вычислительно неотличимые случайные величины

Определение 3.1 (Для неравномерного противника)**.** Случайные величины α_n и β_n, зависящие от натурального параметра n, со значениями в множестве слов некоторой длины $l(n)$ называются *вычислительно неотличимыми*, если для любой последовательности схем

$C_0, C_1, \ldots, C_n, \ldots$ размера $\mathrm{poly}(n)$ (с $l(n)$ входами и одним выходом) вероятность событий $C_n(\alpha_n) = 1$ и $C_n(\beta_n) = 1$ отличаются на пренебрежимо малую величину, т.е.

$$\left|\Pr[C_n(\alpha_n) = 1] - \Pr[C_n(\beta_n) = 1]\right| < \epsilon_n,$$

где ϵ_n убывает быстрее любого обратного полинома. Схема C_n в этом контексте называется *тестом* и мы говорим, что случайная величина α_n проходит тест C_n, если $C_n(\alpha_n) = 1$. Таким образом, мы требуем, чтобы α_n и β_n проходили любые тесты полиномиального размера с приблизительно равной вероятностью.

Определение 3.2 (Для равномерного противника)**.** Случайные величины α_n и β_n, зависящие от натурального параметра n, со значениями в множестве слов некоторой длины $l(n)$ называются *вычислительно неотличимыми*, если для любого вероятностного полиномиального алгоритма T вероятность событий $T(1^n, \alpha_n) = 1$ и $T(1^n, \beta_n) = 1$ отличаются на пренебрежимо малую величину, соответственно

$$\left|\Pr[T(1^n, \alpha_n) = 1] - \Pr[T(1^n, \beta_n) = 1]\right| < \epsilon_n,$$

где ϵ_n убывает быстрее любого обратного полинома. Алгоритм T в этом контексте называется *тестом* и мы говорим, что случайная величина α_n проходит тест T, если $T(1^n, \alpha_n) = 1$.

Замечание 3.1. Если α_n и β_n статистически неотличимы, то они и вычислительно неотличимы (например, для неравномерного противника), поскольку разность вероятностей α_n и β_n в множество $\{x \mid C_n(x)\}$, задаваемое тестом C_n, не превосходит статистического расстояния между α_n и β_n.

Лемма 3.1 (Свойства вычислительной неотличимости)**.**

1. *Отношение вычислительной неотличимости рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

2. *Для неравномерного противника: вычислительно неотличимые последовательности случайных величин α_n и β_n вычислительно неотличимы и вероятностными тестами полиномиального размера. Это означает, что для любой последовательности T_n вероятностных схем полиномиального от n размера с $l(n)$ входами, вероятности событий $T_n(\alpha_n) = 1$ и $T_n(\beta_n) = 1$ приблизительно равны.*

3. *Если α_n и β_n вычислительно неотличимы, а C_n — последовательность вероятностных схем полиномиального размера с $l(n)$ входами, то и случайные величины $C_n(\alpha_n)$ и $C_n(\beta_n)$ вычислительно неотличимы. Аналогично для равномерного противника.*

4. *Пусть случайные величины α_n, β_n и γ_n имеют совместное распределение. И пусть для любой последовательности значений c_n случайной величины γ_n случайные величины $(\alpha_n \mid \gamma_n = c_n)$ и $(\beta_n \mid \gamma_n = c_n)$ вычислительно неотличимы. Тогда и $\alpha_n\gamma_n$ и $\beta_n\gamma_n$ вычислительно неотличимы.*

   Для равномерного противника это свойство справедливо только для независимых случайных величин α_n, γ_n, причём случайная величина γ_n должна быть полиномиально моделируемой.

Доказательство.

1-2. Очевидно.

3. Пусть дана последовательность тестов T_n позволяет отличать $C_n(\alpha_n)$ и $C_n(\beta_n)$. Тогда последовательность схем $D_n(x) = T_n(C_n(x))$ будет вероятностным тестом полиномального размера для случайных величин α_n и β_n.

4. Допустим, что существует последовательность схем-тестов T_n полиномиального размера такая, что вероятность $T_n(\alpha_n\gamma_n) = 1$ $T_n(\beta_n\gamma_n) = 1$ отличается $\epsilon = 1/\mathrm{poly}(n)$ для бесконечно многих n. Разность вероятностей событий $T_n(\alpha_n\gamma_n) = 1$ и $T_n(\beta_n\gamma_n) = 1$ равна среднему значению разности вероятностей

$$\Pr[T_n(\alpha_n c) \mid \gamma_n = c] - \Pr[T_n(\beta_n c) \mid \gamma_n = c]$$

по случайно выбранному c (в соответствии с распределением случайной величины γ_n). Поэтому для бесконечно многих n найдётся $c = c_n$ в множестве значений γ_n, для которой разность вероятности не меньше ϵ. Если "зашить" c_n в схему T_n, то получится полиномиальный тест, различающий $(\alpha_n \mid \gamma_n = c_n)$ и $(\beta_n \mid \gamma_n = c_n)$.

□

3.2. Генераторы псевдослучайных чисел

Определение 3.3. Пусть даны многочлены $k(n)$ и $l(n)$ такие, что $l(n) > k(n)$ для всех n. *Генератором псевдослучайных чисел типа* $k(n) \to l(n)$ будем называть семейство функций $G_n : \{0,1\}^{k(n)} \to \{0,1\}^{l(n)}$, удовлетворяющее следующим условиям.

1. Семейство G_n вычислимо за полиномиальное от n время.
2. (Надежность генератора ПСЧ.) Случайная величина $G_n(s)$ для равномерного случайного s вычислительно неотличима от случайной величины равномерно распределенной на всех словах длины $l(n)$.

Определение 3.4. *Генератор псевдослучайных чисел типа* $k(n) \to \infty$ будем называть семейство отображений $G_n : \{0,1\}^{k(n)} \to \{0,1\}^*$, удовлетворяющее следующим требованиям.

1. Существует алгоритм, который по слову s и натуральному числу l вычисляет элемент последовательности $G_n(s)$ с номером l за время, полиномиальное от $|s| + l$.
2. Случайная величина $G_n(s)$ вычислительно неотличима от равномерно распределённой бесконечной последовательности нулей и единиц. (Это означает, что для любого полинома $p(n)$ первые $p(n)$ битов $G_n(s)$ вычислительно неотличимы от случайной величины равномерно распределённой на всех словах длины $p(n)$.)

Замечание 3.2. По генератору ПСЧ типа $k(n) \to \infty$ можно построить генератор ПСЧ типа $k(n) \to l(n)$ для любого полинома $l(n)$ (нужно взять первый $l(n)$ битов).

Теорема 3.1. *Если существует генератор ПСЧ G_n типа $k(n) \to l(n)$, то существуют и односторонние функции.*

Доказательство. Действительно, можно рассмотреть сам генератор G_n как слабо одностороннюю функцию. Давайте покажем, что никакая последовательность схем полиномиального размера C_n не обращает G_n с вероятностью успеха более $3/4$ для бесконечно многих n. Предположим, что такая последовательность существует. Тогда можно рассмотреть следующий полиномиальный тест для последовательностей длины $l(n)$: для входа y проверяем, что $G_n(C_n(y)) = y$. Если это верно (т.е. обращение произошло удачно), то выдаём 1, а иначе 0. Вероятность того, что G_n пройдёт такой тест не менее $3/4$. При этом равномерно распределённая на $l(n)$ случайная величина пройдёт этот тест с вероятностью не более $1/2$ (т.к. размер образа G_n не более $1/2$). □

Обратное утверждение тоже верно.

Теорема 3.2 ([4]). *Если существует односторонняя функция, то существует и генератор псевдослучайных чисел типа $n \to \infty$.*

Мы же докажем более простое утверждение.

Теорема 3.3. *Если существует односторонняя перестановка, то существует и генератор псевдослучайных чисел типа $n \to \infty$.*

В дальнейшем мы будем говорить про *полиномиального противника* подразумевая под этим две возможных формулировки: полиномиальный вероятностный алгоритм и семейство схем полиномиального размера.

3.3. Трудный бит

Определение 3.5. Для пары совместно распределённых случайных величин (β_n, γ_n), где β_n распределена на $\{0,1\}$ будем говорить, что β_n является *вычислительно трудной* относительно γ_n, если для любого полиномиального противника B

$$\left|\Pr[B(\gamma_n) = \beta_n] - \tfrac{1}{2}\right| < \frac{1}{p(n)}$$

для любого полинома p для достаточно больших n.

Теорема 3.4. *Случайная величина β_n вычислительно трудна относительно γ_n тогда и только тогда, когда случайная величина $\beta_n\gamma_n$ вычислительно неотличима от $r_n\gamma_n$, где r_n — это равномерно распределённая на $\{0,1\}$ случайная величина.*

Доказательство.

$\Leftarrow$ Пусть существует противник B, который для бесконечного числа n предсказывает β_n по γ_n с хорошей вероятностью, т.е.

$$\Pr[B(\gamma_n) = \beta_n] \geq \tfrac{1}{2} + \epsilon_n,$$

где ϵ_n — обратный полином. Используя противника B построим противника A, который различает $\beta_n\gamma_n$ и $r_n\gamma_n$.

$$A(x,y) = \begin{cases} 1, & B(y) = x, \\ 0, & B(y) \neq x. \end{cases}$$

Тогда $\Pr[A(\beta_n\gamma_n) = 1] \geq \frac{1}{2} + \epsilon_n$, а $\Pr[A(r_n\gamma_n) = 1] = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ Пусть существует противник A, который для бесконечного числа n различает $\beta_n\gamma_n$ и $r_n\gamma_n$ с хорошей вероятностью, т.е.

$$\Pr[A(\beta_n\gamma_n) = 1] - \Pr[A(r_n\gamma_n) = 1] \geq \epsilon_n,$$

где ϵ_n — обратный полином. Построим противника B, который предсказывает β_n по γ_n.

$$B(x) = \begin{cases} r, & A(0x) = 0,\ A(1x) = 0, \\ 1, & A(0x) = 0,\ A(1x) = 1, \\ 0, & A(0x) = 1,\ A(1x) = 0, \\ r, & A(0x) = 1,\ A(1x) = 1, \end{cases}$$

где r означает случайный бит.

Покажем, что

$$\Pr[B(\gamma_n) = \beta_n] = \frac{1}{2} + \Pr[A(\beta_n\gamma_n) = 1] - \Pr[A(r_n\gamma_n) = 1] \geq \frac{1}{2} + \epsilon_n.$$

Давайте докажем это равенство для фиксированного $\gamma_n = x$:

$$\Pr[B(\gamma_n) = \beta_n \mid \gamma_n = x] = \frac{1}{2} + \Pr[A(\beta_n\gamma_n) = 1 \mid \gamma_n = x] - \Pr[A(r_n\gamma_n) = 1 \mid \gamma_n = x].$$

Отсюда по формуле полной вероятности получается требуемое равенство. Для того, чтобы убедиться, что это равенство верно, нужно подставить все четыре возможные варианта из определения B и проверить, что равенство выполняется. Например, в первом случае вероятность слева будет равна $1/2$, т.к. B возвращает случайный бит, а справа обе вероятности равны нулю. Для второго случай вероятность слева будет равна первой вероятности справа, а последняя $= 1/2$.

Замечание 3.3. В случае неравномерного противника данная конструкция даёт вероятностную схему, которую, как описано выше можно переделать в детерминированную. В случае равномерного противника нам потребовалось бы также фиксировать внутренние биты вероятностного алгоритма.

□

Определение 3.6. Для односторонней перестановки $f_n : D_n \to D_n$, где $D_n \subset \{0,1\}^{k(n)}$, будем называть *трудным битом* такую полиномиально вычислимую функцию $h_n : D_n \to \{0,1\}$, для которой случайная величина $h_n(U(D_n))$ трудна для $f_n(U(D_n))$.

Утверждение 3.1. *Пусть $f_n : D_n \to D_n$ — односторонняя перестановка с трудным битом $h_n : D_n \to \{0,1\}$. Тогда случайная величина $h_n(x)f_n(x)$ вычислительно неотличима от rx, где $x \leftarrow U(D_n)$, а $r \leftarrow U_1$.*

Доказательство. Заметим, что $f_n(x)$ распределено так же, как x (важно, что f_n — перестановка). Поэтому $rf_n(x)$ распределено так же, как rx. Осталось применить теорему 3.4 для $rf_n(x)$ и $h_n(x)f_n(x)$. □

Это конструкцию можно итерировать. Например, $h_n(x)h_n(f_n(x))f_n(f_n(x))$ позволяет получить два бита. Заметим, что если случайная величина $h_n(x)h_n(f_n(x))f_n(f_n(x))$ отличима от $rh_n(f_n(x))f_n(f_n(x))$, то отличимы $h_n(x)f_n(x)$ и $rf_n(x)$ (первые можно получить из вторых). Продолжая рассуждение получаем, что $h_n(x)h_n(f_n(x))f_n(f_n(x))$ неотличима от $rr'x$, где $r, r' \leftarrow U_1$.

Теорема 3.5. *Пусть $f_n : D_n \to D_n$ — односторонняя перестановка с трудным битом $h_n : D_n \to \{0,1\}$. Тогда случайная величина*

$$h_n(x)h_n(f_n(x)) \dots h_n(f^{(p(n))})f_n^{(p(n)+1)}(x)$$

вычислительно неотличима от случайной величины

$$r_1 r_2 \dots r_{p(n)} x,$$

где $r_1, \dots, r_{p(n)} \leftarrow U_1$, $x \leftarrow U(D_n)$.

Следствие 3.1. *$G_n(x) = h_n(x)h_n(f_n(x)) \cdots h_n(f^{(p(n))})f_n^{(p(n)+1)}(x)$ является надёжным генератором псевдослучайных чисел.*

Доказательство. Доказательство „гибридным“ методом.

$$\begin{array}{lccccc}
T_0 = & h_n(x) & h_n(f_n(x)) & \dots & h_n(f^{(p(n)-1)}) & f_n^{(p(n))}(x) \\
T_1 = & r_1 & h_n(x) & \dots & h_n(f^{(p(n)-2)}) & f_n^{(p(n)-1)}(x) \\
T_2 = & r_1 & r_2 & \dots & h_n(f^{(p(n)-3)}) & f_n^{(p(n)-2)}(x) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
T_{p(n)} = & r_1 & r_2 & \dots & r_{p(n)} & x
\end{array}$$

Пусть взломщик B отличает T_0 от $T_{p(n)}$, т.е. $\Pr[B(T_0) = 1] - \Pr[B(T_0) = 1] \geq \epsilon_n$ для бесконечного числа n и обратного полинома ϵ_n. Тогда существует такое i, что

$$\Pr[B(T_i) = 1] - \Pr[B(T_{i+1}) = 1] \geq \epsilon_n / p(n).$$

Т.е. мы научились отличать

$$\begin{array}{cccccccc}
r_1 & \dots & r_i & h_n(x) & h_n(f_n(x)) & \dots & h_n(f^{(p(n)-i-1)}) & f_n^{(p(n)-i)}(x) \\
r_1 & \dots & r_i & r_{i+1} & h_n(x) & \dots & h_n(f^{(p(n)-i-2)}) & f_n^{(p(n)-i-1)}(x)
\end{array}$$

Используя противника, который отличает эти две случайные величины мы можем отличать $h_n(f)f_n(x)$ от rx — по этим случайным величинам можно детерминированным алгоритмом построить соответствующие значения T_i и T_{i+1}, что противоречит утверждению 3.1.

Замечание 3.4. В этом доказательстве мы воспользовались тем, что наш у нас неравномерный противник, т.е. для схема, т.к. мы в эту схему зашили число i. В случае с алгоритмами можно взять случайное i и доказать, что с хорошей вероятностью оно подойдёт.

□

Теорема 3.6 (Голдрейх, Левин)**.** *Пусть $f_n : D_n \to D_n$ — односторонняя перестановка, $D_n \subseteq \{0,1\}^{k(n)}$. Рассмотрим две функции: $g_n : D_n \times \{0,1\}^{k(n)} \to D_n \times \{0,1\}^{k(n)}$ и $h_n : D_n \times \{0,1\}^{k(n)} \to \{0,1\}$, такие что*

$$g_n(xy) = f_n(x)y, \quad h_n(x,y) = x \odot y = \bigoplus_{i=1}^{k(n)} x_i y_i = \sum_{i=1}^{k(n)} x_i y_i \mod 2.$$

Тогда g_n — односторонняя перестановка с трудным битом h_n.

Определение 3.7. *Код Уолша-Адамара* — это код исправляющий ошибки $WH : \{0,1\}^k \to \{0,1\}^{2^k}$, определяющий следующим соотношением $WH(x) = (x \odot y)_{y \in \{0,1\}^k}$.

Код Уолша-Адамара не очень удобен в практических применениях, т.к. он удлиняет строки в экспоненту раз. Однако он обладает одним очень хорошим свойством.

Утверждение 3.2. *Код Уолша-Адамара имеет расстояние 2^{k-1}.*

Доказательство. Пусть $x_i \neq y_i$. Рассмотрим r и $r^{\oplus i}$, где $r, r^{\oplus i} \in \{0,1\}^k$ и отличаются только в бите i. Тогда либо $x \odot r$ отличается от $x \odot r^{\oplus i}$, либо $y \odot r$ отличается от $y \odot r^{\oplus i}$. Т.е. все $\{0,1\}^k$ можно разбить на пары, различающиеся в одном бите, то все пары строк имеют коды, отличающиеся ровно в половине всех битов. □

Лемма 3.2. *Пусть $s \in \{0,1\}^{2^m}$ и $\Pr_i[s_i \neq WH(x)] \leq 1/2 - \epsilon$ (в терминах расстояния Хеммнига $\Delta(WH(x), s) \leq (1/2 - \epsilon)2^m$). Существует вероятностный алгоритм A^s со временем работы $\mathrm{poly}(m, \frac{1}{\epsilon})$, который выдаёт список L слов длины m такой, что $x \in L$ с вероятностью не менее $1/2$ (алгоритм получает оракульный доступ к строке s).*

Доказательство теоремы Голдрейха-Левина. Функция g_n является перестановкой. Легко показать, что если противник взламывает g_n, то он взламывает и f_n, т.е. g_n является односторонней перестановкой.

Теперь нужно показать, что h_n является трудным битом g_n. Пусть существует неравномерный противник B (в дальнейшем будем предполагать, что противник — это всегда семейство схем), который предсказывает h_n, т.е.

$$\Pr_{x\leftarrow U(D_n),y\leftarrow U_{k(n)}}[B(f(x)y) = x \odot y] \geq 1/2 + \epsilon_n$$

для бесконечного числа n и обратного полинома ϵ_n. Построим противника C, который обращает f_n, т.е.

$$\Pr_{x\leftarrow U(D_n)}[C(f_n(x)) = x] \geq \epsilon_n/4.$$

Противник C будет использовать алгоритм декодирования списком кода Уолша-Адамара из леммы 3.2 и при обращении к биту y выдаём значение $B(f(x)y)$. В списке L, который возвращает алгоритм A ищем z такое, что $f_n(z) = f_n(x)$. Если такое z нашлось, то выдаём его, иначе выдаём любую строку.

Пусть $M \subseteq D_n$ и $x \in M \iff \Pr_{y\leftarrow U_{k(n)}}[B(f_n(x)y) = x \odot y] \geq 1/2 + \epsilon_n/2$. Давайте покажем, что $\Pr_{x\leftarrow U(D_n)}[x \in M] \geq \epsilon_n/2$. Пусть это не так, тогда

$$\begin{aligned}\Pr_{x,y}[B(f_n(x)y) = x \odot y] &= \Pr_{x,y}[B(f_n(x)y) = x \odot y \mid x \in M] \cdot \Pr_x[x \in M] \\ &+ \Pr_{x,y}[B(f_n(x)y) = x \odot y \mid x \notin M] \cdot \Pr_x[x \notin M] \\ &< 1 \cdot \epsilon_n/2 + (1/2 + \epsilon_n/2) \cdot 1 < 1/2 + \epsilon_n.\end{aligned}$$

Заметим, что $\Pr_x[C(f_n(x)) = x \mid x \in M] \geq 1/2$, т.к. с вероятность не менее $1/2$ в списке будет искомый элемент. Поэтому получаем

$$\Pr_x[C(f_n(x)) = x] \geq \Pr_x[C(f_n(x)) = x \mid x \in M] \cdot \Pr_x[x \in M] \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon_2}{2} = \frac{\epsilon_n}{4}.$$

□

Доказательство леммы 3.2. Будем рассматривать код Уолша-Адамара как таблицу истинности некоторой функции $f : \{0,1\}^m \to 1$. Пусть $WH(x)$ соответствует f, а кодовое слово s — некоторой функции $\tilde{f}$. Таким образом для восстановления x нам нужно вычислить f на входах $100\cdots0$, $010\cdots0$, $001\cdots0$,... Действительно,

$$\begin{aligned}x_1 &= f(100\cdots0) \\ x_2 &= f(010\cdots0) \\ &\vdots \\ x_n &= f(000\cdots1)\end{aligned}$$

Используя линейность f мы можем вычислять $f(z)$ следующим образом: выберем случайный r и вычислим $f(z) = f(r) \oplus f(z \oplus r)$. Проблема в том, что доступа к f у нас нет, а есть доступ к $\tilde{f}$, про которую известно $\Pr_y[f(y) \neq \tilde{f}(y)] \leq 1/2 - \epsilon$. Используя идею с линейностью мы можем попробовать вычислять $f(z) = \tilde{f}(r) \oplus \tilde{f}(z \oplus r)$ (добавление r позволяет вычислять $\tilde{f}$ в *случайной* точке, в то время как значение $\tilde{f}$ на строках вида $00\cdots010\cdots00$ может быть неправильным). Если бы ошибка в $\tilde{f}$ случалась с вероятностью менее $1/4 - \epsilon$, то суммарная ошибка при таком вычислении $f(z)$ была бы не более $1/2 - 2\epsilon$. Тогда мы могли бы её амплифицировать и получить $f(z)$ с хорошей вероятностью. Однако, ошибка в f случается с большей вероятностью.

Идея. Если бы у нас был доступ к истинному значению, то тогда бы тоже всё сработало $f(z) = f(r) \oplus \tilde{f}(z \oplus r)$. Предположим, что мы всё же умеем вычислять $f(r)$ вместо $\tilde{f}(r)$. Тогда мы можем вычислить $f(z)$ следующим образом: выберем случайные $r_1, r_2, \ldots, r_N$ и вычислим $\mathrm{maj}_i\{f(r_i) \oplus \tilde{f}(z \oplus r_i)\}$. С хорошей вероятностью полученное значение будет совпадать с $f(z)$. Чтобы оценить это давайте вспомним следующий факт из теории вероятностей.

Замечание 3.5. Неравенство Чебышёва (закон больших чисел для 2-независимых случайных величин). Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_N$ — одинаково распределённые попарно-независимые Бернулиевские случайные величины, $\forall i, \Pr[X_i = 1] = p$, тогда

$$\Pr\left[\left|\frac{\sum_i X_i}{N} - p\right| \geq \delta\right] \leq \frac{1}{\delta^2 N}.$$

Для применения этого неравенства нам нужны попарно независимые случайные величины. Пусть $N = 2^k - 1$, конкретное значение для N мы определим позже. Выберем $t_1, t_2, \ldots, t_k \leftarrow U_m$ — независимые случайные строки. Из этих случайных строк можно сгенерировать N попарно независимых следующим образом:

$$\forall J \subseteq \{1, \ldots, k\},\ J \neq \emptyset,\ r_J = \bigoplus_{i \in J} t_i.$$

Утверждение 3.3. *Если $J_1 \neq J_2$, то r_{J_1} и r_{J_2} будут независимыми.*

Следствие 3.2. *$\{r_J\}_J$ — 2-независимые случайные величины.*

Теперь опишем алгоритм декодирования кода Уолша-Адамара используя нашу идею с вычисление $f(r)$. Сгененируем независимые $t_1, t_2, \ldots, t_k \leftarrow U_m$ и по ним определим $r_J = \bigoplus_{i \in J} t_i$, $J \subset [n], J \neq \emptyset$. Так как доступа к f у нас нет, то вычислить $f(r)$ мы не можем. Вместо этого мы переберём все значения для $f(r)$. Если бы все r были независимы, то нам пришлось бы перебрать 2^N различных значений. Однако, наши r получаются из k строк t_i. Поэтому достаточно перебрать значения f на t_i. Пусть $\forall i, a_i = f(t_i)$, тогда

$$f(r^J) = f\Big(\bigoplus_{j \in J} t_j\Big) = \bigoplus_{j \in J} f(t_j) = \bigoplus_{j \in J} a_j.$$

Таким образом, алгоритм декодирования для всех возможных $a_1, \ldots, a_k \in \{0, 1\}$ добавит в список L строку $x_1, \ldots, x_m$, полученную по следующей процедуре:

$$x_i = \operatorname*{maj}_J\Big\{\bigoplus_{j \in J} a_j \oplus \tilde{f}\big((0 \cdots \underset{i}{1} \cdots 0) \oplus r^J\big)\Big\},$$

Для успеха x_i должен быть верен с вероятностью не менее $1 - \frac{1}{10m}$ (тогда весь x мы угадаем с вероятностью $\geq 9/10$). Определим случайные величины $\{X_i^J\}$ такие, что

$$X_i^J = 1 \iff \tilde{f}\big((0 \cdots \underset{i}{1} \cdots 0) \oplus r^J\big) = f\big((0 \cdots \underset{i}{1} \cdots 0) \oplus r^J\big).$$

Пусть $p = \Pr[X_i^J = 1] \geq 1/2 + \epsilon$. По закону больших чисел вероятность того, что при вычислении maj мы получим более половины неправильных значений $\tilde{f}$ не более $\frac{1}{\epsilon^2 N}$.

$$\begin{aligned}\Pr[x_i \text{ ошибочный}] &= \Pr\left[\sum_J \frac{X_i^J}{N} \le \frac{1}{2}\right] \\ &= \Pr\left[\sum_J \frac{X_i^J}{N} - \left(\frac{1}{2}+\epsilon\right) \le -\epsilon\right] \\ &\le \Pr\left[\left|\sum_J \frac{X_i^J}{N} - \left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)\right| \ge \epsilon\right] \\ &\le \Pr\left[\left|\sum_J \frac{X_i^J}{N} - p\right| \ge \epsilon\right] \le \frac{1}{\epsilon^2 N}.\end{aligned}$$

Таким образом, мы требуем, чтобы $\frac{1}{\epsilon^2 N} \le \frac{1}{10m}$, следовательно $N \ge \frac{10m}{\epsilon^2}$. □

4. Протоколы шифрования с секретным ключом

Определение 4.1. Пусть дана доступная случайная величина d_n. *Одноразовый протокол с секретным ключом* задаётся двумя вероятностными полиномиальными алгоритмами $E(d,x)$ и $D(d,m)$, такими, что $D(d,E(d,x)) = x$. Будем говорить, что этот протокол *надёжный*, если для некоторого полинома l и любых последовательный строк x_n и y_n длины $l(n)$ случайные величины $E(d_n,x_n)$ и $E(d_n,y_n)$ вычислительно неотличимы.

Такой протокол мы уже можем построить. Возьмём генератор псевдослучайных чисел $G : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^{l(n)}$. Возьмём $d_n = U_n$ и для $x \in \{0,1\}^{l(n)}$ определим

$$\begin{aligned}E(d,x) &= G(d) \oplus x, \\ D(d,m) &= G(d) \oplus m.\end{aligned}$$

Если бы противник научился отличать случайные величины $E(d_n,x_n)$ и $E(d_n,y_n)$, то он также научился бы отличать одну из этих случайных величин от равномерного распределения $U_{l(n)}$. Пусть он умеет отличать $E(d_n,x_n)$ от $U_{l(n)}$. Тогда мы можем зашить x_n в схему и таким образом научиться отличать образ $G(d_n)$ от $U_{l(n)}$.

Определение 4.2. Пусть $S_n \subseteq \{0,1\}^{l(n)}$ и для любого $s \in S_n$ определена функция $f_n^s : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$. Множество функций $\{f_n^s\}_{s\in S_n}$ называется *семейством псевдослучайных функций*, если выполняются следующие свойства.

1. Существует полиномиальный алгоритм, который по (s,x) вычисляет $f_n^s(x)$.
2. Распределение $U(S_n)$ доступно.
3. (*слабая надёжность*) Для любого полинома p и для любого набора различных строк $t_1,\dots,t_{p(n)} \in \{0,1\}^n$ случайная величина $f_n^s(t_1)f_n^s(t_2)\cdots f_n^s(t_{p(n)})$ вычислительно неотличима от $U_{np(n)}$, где $s \leftarrow U(S_n)$.

3′. (*сильная надёжность*) Для любого полинома p, любого семейства схем полиномиального размера $\{C_i\}_{i=1}^{p(n)-1}$ и любого $t_1 \in \{0,1\}^n$ определим случайные величины $\{y_i\}_{i=1}^{p(n)}$

следующим образом:

$$\begin{aligned} s &\leftarrow U(S_n),\\ y_1 &= f_n^s(t_1),\\ t_2 &= C_1(t_1, y_1),\\ y_2 &= f_n^s(t_2),\\ t_3 &= C_2(t_1, y_1, y_2),\\ y_3 &= f_n^s(t_3),\\ &\vdots \end{aligned}$$

Тогда случайная величина $y_1 y_2 \cdots y_{p(n)}$ вычислительно неотличима от $U_{np(n)}$ (при условии, что все t_i различны).

Теорема 4.1. *Если существует генератор псевдослучайных чисел, то существует и семейство псевдослучайных функций.*

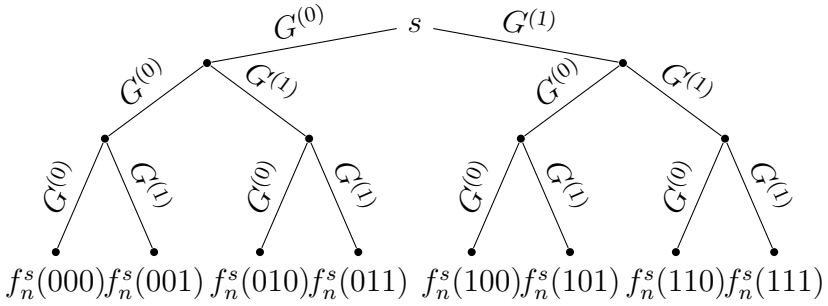
Доказательство. Пусть $G_n : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^{2n}$. Мы построим семейство псевдослучайных функций $\{f_n^s\}_{s \in S_n}$, где $S_n = \{0,1\}^n$, $f_n^s : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$. Для этого определим функции $G_n^{(0)}, G_n^{(1)} : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ исходя из следующего соотношения:

$$G_n(r) = G_n^{(0)}(r)\, G_n^{(1)}(r).$$

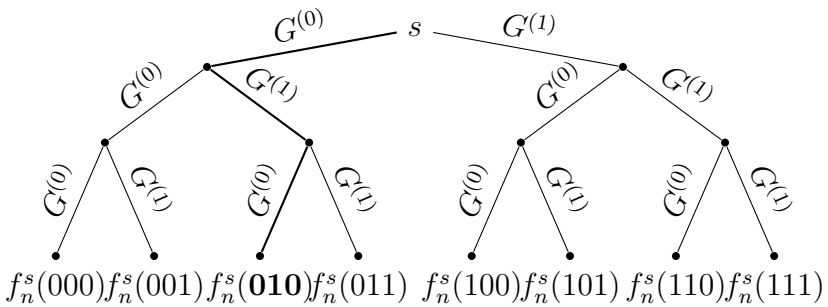
Тогда

$$f_n^s(x) = G_n^{(x_n)}(\cdots G_n^{(x_2)}(G_n^{(x_1)}(s))\cdots).$$

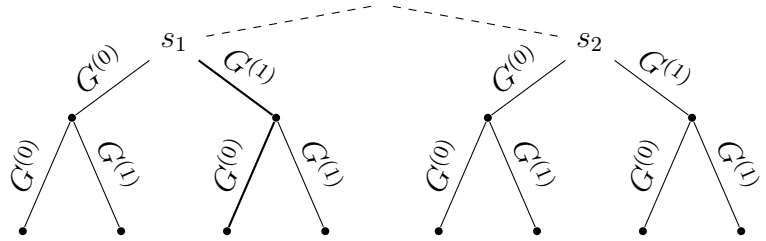
Можно представить вычисление f_n^s на всевозможных x в виде бинарного дерева: в корне записано число s; если в вершине записано число z, то в его наследниках будут записаны $G^{(0)}(z)$ и $G^{(1)}(z)$; в листьях дерева будут все возможные $f_n^s(x)$.



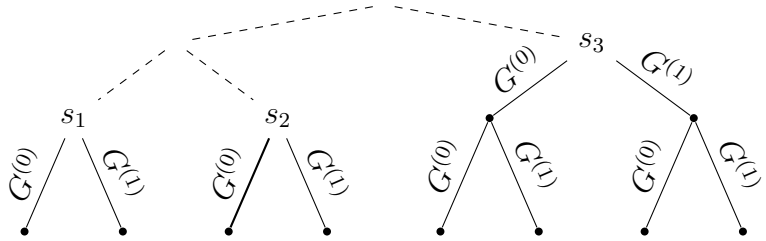
Будем доказывать гибридным методом. Для этого нам нужно построить последовательность распределений, которые постепенно сходятся к равномерному. Изначальное распределение задаёт дерево T_0, в корне которого выбирается s, а дальше вычисление происходит детерминировано. Каждое t_i задаёт некоторый путь от корня к листьям. Мы будем модифицировать исходное дерево следующим образом: для каждой вершины на пути соответствующему t_1 мы будем удалять эту вершину из дерева и заменять её сыновей на случайные строки из $U(S_n)$.



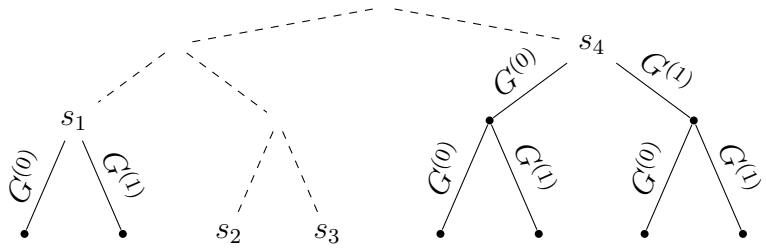
Для примера $t_1 = 010$.



Удаляем корневую вершину и заменяем её сыновей на $s_1, s_2 \leftarrow U(S_n)$



Удаляем следующую вершину и заменяем сыновей на случайные элементы из $U(S_n)$.



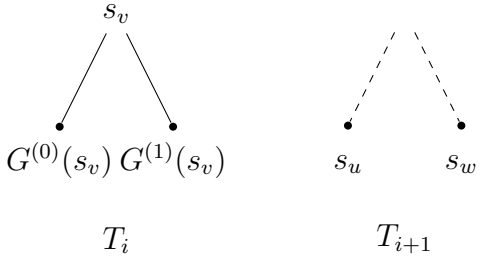
Удаляем последнюю вершину и заменяем сыновей на случайные элементы из $U(S_n)$.

В конце этого процесса в вершине, которая раньше соответствовала t_1, будет некоторый $s_j \leftarrow U(S_n)$. Мы повторим этот процесс для всех t_i. Таким образом получится последовательность из $n \cdot p(n) + 1$ дерева, которые задают распределения $\{T_i\}_{i=0}^{np(n)}$. В последнем распределении $T_{np(n)}$ значение для каждого $f_n^s(t_i)$ выбирается из $U(S_n)$, т.е. это соответствует равномерному распределению.

Если существует противник, который отличает первое распределение от последнего, то существуют и два последовательных распределения, которые этот противник различает с хорошей вероятностью:

$$\Pr_{z \leftarrow T_0}[B(z) = 1] - \Pr_{z \leftarrow T_{np(n)}}[B(z) = 1] \geq \epsilon_n \implies \exists i : \Pr_{z \leftarrow T_i}[B(z) = 1] - \Pr_{z \leftarrow T_{i+1}}[B(z) = 1] \geq \frac{\epsilon_n}{np(n)}.$$

Дерево распределения T_{i+1} отличается от T_i в трёх вершинах:



Таким образом противник может отличить образ генератора $G(s_v) = G^{(0)}(s_v)G^{(1)}(s_v)$ от полностью случайной строки $s_u s_w$ с вероятностью больше $\epsilon_n/(n \cdot p(n))$. □

Замечание 4.1. Это было доказательство надёжности в смысле п.3. То же самое доказательство работает и для п.3′.

Определение 4.3. Пусть d_n — доступная случайная величина $d_n \in \{0,1\}^{k(n)}$. *Многоразовый протокол с секретным ключом* — это пара полиномиальных вероятностных алгоритмов $E(d,x)$ и $D(d,m)$ таких, что $D(d,E(d,x)) = x$, и выполняются следующее условие надёжности.

a) (*слабая надёжность*) Для любых полиномов p и q и для любого набора сообщений $x_1,\dots,x_{p(n)} \in \{0,1\}^{q(n)}$ при $d \leftarrow d_n$ случайные величины $E(d,x_1)\cdots E(d,x_{p(n)})$ и $E(d,0^{q(n)})\cdots E(d,0^{q(n)})$ вычислительно неотличимы.

b) (*сильная надёжность*) Для любых полиномов p и q, любого $x_1 \in \{0,1\}^{q(n)}$ и семейства полиномиальных схем $\{C_i\}_{i=1}^{p(n)-1}$ определим $\{x_i\}_{i=2}^{p(n)}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} d &\leftarrow d_n,\\ c_1 &= E(d,x_1),\\ x_2 &= C_1(x_1,c_1),\\ c_2 &= E(d,x_1),\\ x_3 &= C_2(x_1,c_1,c_2),\\ c_3 &= E(d,x_2),\\ x_4 &= C_3(x_1,c_1,c_2,c_3),\\ &\vdots\\ x_{p(n)} &= C_{p(n)-1}(x_1,c_1,\dots,c_{p(n)-1}),\\ c_{p(n)} &= E(d,x_{p(n)}). \end{aligned}$$

Тогда получившаяся случайная величина $c_1,\dots,c_{p(n)}$ вычислительно неотличима от случайной величины $E(d,0^{q(n)})\cdots E(d,0^{q(n)})$.

Теорема 4.2. *Если существует семейство псевдослучайных функций, то существует и многоразовый протокол с секретным ключом.*

Доказательство. Докажем для сообщения из одного бита. Из этого будет следовать, что есть протокол для сообщения любой длины. Пусть $f_s : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ — семейство псевдослучайных функций, $s \in \{0,1\}^n$. Тогда $d_n = U_n$. Алгоритм шифрования $E(d,m)$ для ключа $d \leftarrow d_n$ и бита $m \in \{0,1\}$ выбирает $z \leftarrow U_n$ и выдаёт $(m \oplus f_d(z), z)$. Алгоритм дешифровки $D(d,y)$, где $y \in \{0,1\}^{n+1}$, $y = bz$, выдаёт $b \oplus f_d(z)$. Корректность протокола очевидна. Нужно доказать многоразовую надёжность.

Пусть коды сообщений $m_1,\dots,m_{p(n)}$ соответственно

$$(f_d(z_1)\oplus m_1, z_1), (f_d(z_2)\oplus m_2, z_2), \dots, (f_d(z_{p(n)})\oplus m_{p(n)}, z_{p(n)}).$$

Нужно показать, что такая случайная величина вычислительно неотличима от строки из $U_{(n+1)\cdot p(n)}$. Если это не так, то мы могли бы отличить псевдослучайные функции от равномерного распределения (см. соответствующее определение надёжности псевдослучайных функций). □

Замечание 4.2. У этой схемы есть существенный недостаток: длина шифра в $n+1$ раз длиннее самого сообщения.

4.1. Эффективная схема шифрования с закрытым ключом

Для шифрования сообщений $m \in \{0,1\}^{k(n)}$ возьмём семейство псевдослучайных функций $f^s : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$, где $s \in S_n = \{0,1\}^n$, и генератор псевдослучайных чисел $G : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^{k(n)}$. Тогда алгоритм шифрования может быть устроен так: выберем случайное $z \leftarrow U_n$ и определим $E(d,m) = (G(f^d(z)) \oplus m, z)$, $D(d,(c,z)) = G(f^d(z)) \oplus c$.

Утверждение 4.1. *Описанная схема шифрования надёжна.*

Схема доказательства. Доказываем гибридным методом в два этапа. Сначала заменяем функции f^s на случайные строки длины n (за один шаг), а потом заменяем применения генераторов на случайные строки длины $k(n)$ (за $p(n)$ шагов). □

5. Протоколы шифрования с открытым ключом

Определение 5.1. Пусть (e_n, d_n) — доступные случайные величины. Пара вероятностных полиномиальных алгоритмов (E, D) называется *системой шифрования с отрытым ключом*, если алгоритмы шифрования и дешифрования, $E(e,m)$ и $D(e,d,c)$, связанны следующим соотношением (корректность): $D(e,d,E(e,m)) = m$. *Надёжность* протокола определяется следующим образом: для любого полинома p и любых сообщений $x, y \in \{0,1\}^{p(n)}$ случайные величины $\langle e, E(e,x)\rangle$ и $\langle e, E(e,y)\rangle$ вычислительно неотличимы для $e \leftarrow e_n$.

Замечание 5.1. В такой системе шифрования значение e сообщается всем (*публичный ключ*), а d — никому (*секретный ключ*).

Замечание 5.2. Шифрование с закрытым ключом называют *симметричным* (для шифрования и дешифрования используется один и тот же ключ), а шифрование с открытым ключом — *асимметричным* (ключи разные).

Замечание 5.3. Для протоколов с открытым ключом из одноразовой надежности следует многоразовая надежность.

Определение 5.2 (trapdoor permutation family)**.** Пусть задан полиномиальный вероятностный алгоритм K, который получив на вход 1^n генерирует пару слов $\langle e, d\rangle$ или выдаёт $\perp$ (символ неудачи), причём последнее происходит с пренебрежимо малой вероятностью. Слова e и d называются соответственно *открытым и закрытым ключами*. Будем через A_n обозначать первые компоненты всех возможных пар $\langle e, d\rangle$, генерируемых алгоритмом K на входе 1^n. Пусть для каждого $e \in A_n$ задана перестановка f_n^e некоторого множества слов D_n^e длины $l(n)$. Последовательность пар $\{(\langle e_n, d_n\rangle, f_n^e)\}$ будем называть *семейством односторонних перестановкой с секретом*, если выполнены следующие условия.

1. (Доступность равномерного распределения на области определения). Существует вероятностный полиномиальный алгоритм B, который по 1^n и любому $e \in A_n$ генерирует случайную величину, статистически неотличимую от равномерно распределённой на D_n^e случайной величины при известном e_n. (Т.е. пара, состоящая из e и выхода алгоритма B статистически неотличима от пары, состоящей из e и случайной строки D_n^e.)

   Из этого условия следует доступность случайной величины $\langle e, U(D_n^e)\rangle$.

2. (Полиномиальная вычислимость.) Функция $\langle 1^n, e, x\rangle \to f_n^e(x)$ вычислима за полиномиальное от n время.

3. (Необратимость.) Для любой последовательности схем C_n полиномиального размера вероятность того, что C_n по $\langle e, f_n^e(x)\rangle$ найдёт x, стремится к нулю быстрее любого обратного полинома от n (e выбирается случайно из A_n, x выбирается случайно из D_n^e).

4. (Возможность обращения при известном закрытом ключе.) Существует полиномиальный вероятностный алгоритм, который по тройке $\langle 1^n, d, f_n^e(x)\rangle$ с вероятностью близкой к 1 вычисляет x. Здесь пара $\langle e, d\rangle$ выбирается генератором случайной величины $\langle e_n, d_n\rangle$, а x выбирается равномерно в D_n^e.

Замечание 5.4. Предположение о существовании односторонних перестановок с секретом сильнее, чем существование односторонних функций. Если функция Рабина или RSA является односторонней, то существуют односторонние перестановки с секретом.

- В случае RSA открытым ключом будет $\langle p \cdot q, z\rangle$, а закрытым $z^{-1} \bmod \phi(p \cdot q)$.
- В функции Рабина открытым ключом будет $p \cdot q$, а секретным ключом будет $\langle p, q\rangle$.

Определение 5.3. Для односторонней перестановки с секретом $f_n^e : D_n \to D_n$, где $D_n \subset \{0,1\}^{k(n)}$, будем называть *трудным битом* такую полиномиально вычислимую функцию $h_n : D_n \to \{0,1\}$, для которой случайная величина $h_n(U(D_n))$ трудна для $\langle e, f_n^e(U(D_n))\rangle$.

Теорема 5.1. *Если существует семейство перестановок с секретом, то существует протокол с открытым ключом.*

Доказательство. Заметим, что если есть многоразовая надёжность, то достаточно научиться шифровать сообщения из одного бита (будем пересылать сообщение зашифрованное побитово). Воспользуемся теоремой Голдрейха-Левина и по перестановке с секретом f_n^e построим перестановку с секретом g_n^e с трудным битом h_n^e:

$$g_n^e(x, r) = f_n^e(x)r, \quad h_n^e(x, r) = x \odot r.$$

Утверждение 5.1. *Величина $h_n^e(x, r)$ является трудной для $\langle e, g_n^e(x, r)\rangle$.*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы Голдрейха-Левина. □

Теперь построим протокол для кодирования одного бита. Для ключей $\langle e, d\rangle \leftarrow K$:

- алгоритм $E(e, m)$, где $m \in \{0,1\}$, выбирает случайный элемент $x \leftarrow U(D_n)$, случайные биты $r \leftarrow U_{l(n)}$ и выдаёт $\langle m \oplus h_n^e(x, r), g_n^e(x, r)\rangle$;
- алгоритм $D(e, d, \sigma yr)$ вычисляет $x = (g_n^e)^{-1}(y)$ и возвращает $\sigma \oplus h_n^e(x, r)$.

Давайте докажем, что при известном e для любых последовательностей битов y_n, z_n случайные величины $\langle y_n \oplus h_n^e(x, r), g_n^e(x, r), e\rangle$ и $\langle z_n \oplus h_n^e(x, r), g_n^e(x, r), e\rangle$ будут вычислительно неотличимы. Обе эти случайные величины неотличимы от $\langle U_1, U(D_n), e\rangle$ по соответствующей теореме о трудном бите. □

Замечание 5.5. Можно научиться посылать несколько длинные сообщения, если воспользоваться конструкцией, которую мы использовали для псевдослучайного генератора (т.е. получится последовательность случайных битов).

6. Протокол привязки (схема обязательства, commitment protocol)

Один участник хочет послать другому участнику некоторый зашифрованный секрет таким образом, что

- без знания ключа секрет невозможно расшифровать,
- не существует другого ключа, который расшифровывал код, в другой секрет.

6.1. Неинтерактивный протокол привязки к строке

Определение 6.1. *Неинтерактивный протокол привязки к строке* — это пара полиномиальных алгоритмов S и R:

- вероятностный алгоритм $S(x, 1^n) = (c, k)$ шифрует секрет, где x — это секрет (строка), $c(x)$ — шифр секрета, а $k(x)$ — ключ,
- детерминированный алгоритм $R(c, k) \in \{x, \perp\}$ по зашифрованному секрету и ключу либо восстанавливает *исходный* секрет, либо сообщает, что ключ не подходит.

При этом выполняются следующие условия.

1. (Полнота) Если $S(x, 1^n) = (c, k)$, то $R(c, k) = x$ с вероятностью близкой к 1.
2. (Неразглашение) Для любого полинома p и любых последовательностей строк x_n, y_n, $|x_n| = |y_n| = p(n)$, если c_n — привязка x_n, d_n — привязка y_n, то случайный величины c_n и d_n вычислительно неотличимы.
3. (Недвусмысленность) Ни для какого n не существует таких c, k_1, k_2, что одновременно $R(c, k_1) \neq \perp$, $R(c, k_2) \neq \perp$ и $R(c, k_1) \neq R(c, k_2)$.

Замечание 6.1. Достаточно научиться привязывать к биту (т.е. достаточно построить конструкцию для $p(n) = 1$).

Определение 6.2. Будем называть одностороннюю перестановку $f_n : D_n \to D_n$ *правильной*, если равномерное распределение на $D_n \cup \{\perp\}$ полиномиально моделируемо (т.е., если не получилось сгенерировать элемент из D_n, то выдаётся особый символ $\perp \notin D_n$).

Теорема 6.1. *Если существует правильная односторонняя перестановка, то существует и неинтерактивный протокол привязки к биту.*

Доказательство. Пусть $f_n : D_n \to D_n$ — односторонняя перестановка с трудным битом h_n. Будем привязывать бит $\sigma \in \{0, 1\}$. Выберем строку x из распределения на D_n, которое вычислительно неотличимо от равномерного (есть по свойству доступности). Тогда $S(\sigma, 1^n) = (\underbrace{\langle h_n(x) \oplus \sigma, f_n(x)\rangle}_{c}, \underbrace{r_n}_{k})$, где r_n — это случайные биты, которые использовались для генерации x.[2] Соответственно, $R(c, k)$ генерирует x используя в качестве случайных битов k и проверяет, что $f_n(x)$ совпадает с соответствующими битами c. Если это так, то бит σ восстанавливается по первому биту c. Несложно увидеть, что свойство 1 выполняется по построению, свойство 2 следует из определения трудного бита, а свойство 3 из того, что K возвращает только элементы из D_n. □

[2] Нельзя в качестве ключа выбрать x, т.к. тогда нужно было бы уметь проверять, что $x \in D_n$.

7. Интерактивные протоколы

Определение 7.1. *Интерактивный протокол* — это пара вероятностных алгоритмов $A(1^n, x, h)$ и $B(1^n, y, h)$, которые „общаются между собой", передавая сообщения друг другу. Интерактивный протокол состоящий из t раундов устроен так:

$$\begin{aligned} s_1 &\leftarrow A(1^n, x, \lambda), \\ s_2 &\leftarrow B(1^n, x, s_1), \\ s_3 &\leftarrow A(1^n, x, \langle s_1, s_2 \rangle), \\ s_4 &\leftarrow B(1^n, x, \langle s_1, s_2, s_3 \rangle), \\ &\vdots \\ s_{t-1} &\leftarrow A(1^n, x, \langle s_1, s_2, \ldots, s_{t-2} \rangle), \\ s_t &\leftarrow B(1^n, x, \langle s_1, s_2, \ldots, s_{t-1} \rangle). \end{aligned}$$

В последнем сообщении s_t содержится некоторый признак (например, специальный символ), который сигнализирует об окончании общения. Алгоритмы такого вида будем называть *интерактивными алгоритмами*. Через $\pi_{A(x),B(y)}$ будем обозначать историю взаимодействия алгоритмов A и B на входах x и y соответственно. Для t-раундового протокола $\pi_{A(x),B(y)} = \langle s_1, s_2, \ldots, s_t \rangle$. После завершения общения алгоритмы A и B ещё раз запускаются на полученной истории и печатают результат, т.е. на стороне алгоритма A результатом будет $A(1^n, x, \pi_{A(x),B(y)})$, а на стороне алгоритма B — $B(1^n, y, \pi_{A(x),B(y)})$. Аналогичное определение можно дать и для схем, нужно только позаботиться о том, чтобы аккуратно закодировать неполную историю (можно, например, использовать алфавит с дополнительными символами).

7.1. Интерактивные протоколы привязки к строке

Для неинтерактивного протокола привязки нам потребовалось предположить существование правильных односторонних перестановок. Оказывается, что если добавить интерактивность, то можно построить протокол привязки при более слабом предположении.

Определение 7.2. *Интерактивный протокол привязки к строке* — полиномиальный (по суммарному времени, а следовательно и по количеству раундов) интерактивный протокол, заданный полиномиальными вероятностными алгоритмами $S(1^n, \sigma, h)$ и $T(1^n, h)$, и детерминированный полиномиальный алгоритм $R(1^n, c, k)$, где S — алгоритм стороны, которая осуществляет привязку, T — алгоритм стороны, которая получает привязку, а R — алгоритм проверяющий, что привязка действительно соответствует исходной строке. Привязкой строки σ в этом интерактивном алгоритме будет $c(\sigma) = \pi_{S(\sigma),T}$. После окончания взаимодействия алгоритм S выдаёт ключ $k(\sigma)$, соответствующий этой привязке. Алгоритм $R(c, k)$ выдаёт либо строку σ, по которой была построена привязка, либо один из специальных символов $\perp_S$ и $\perp_T$, которые „обвиняют" соответственно, протокол S и T в жульничестве. Кроме того, должны выполняться следующие свойства.

1. (Корректность) $R(\pi_{S(\sigma),T}, k_{n,\sigma}) = \sigma$ с вероятностью 1.
2. (Полнота) Для любого (схемного) противника T^*

   $$R(\pi_{S(\sigma),T^*}, k_{n,\sigma}) \in \{\sigma, \perp_T\}$$

   с вероятностью пренебрежимо отличающейся от 1.

3. (Неразглашение) Для любого противника T^*, полинома $p(n)$ и любых последовательностей строк x_n, y_n, $|x_n| = |y_n| = p(n)$, случайные величины $\pi_{S(x_n),T^*}$ и $\pi_{S(y_n),T^*}$ вычислительно неотличимы.

4. (Недвусмысленность привязки) Для любого противника S^* вероятность

$$\Pr\left[\exists k_1, k_2 \mid R(\pi_{S^*,T}, k_1) \neq \perp_S, R(\pi_{S^*,T}, k_2) \neq \perp_S, R(\pi_{S^*,T}, k_1) \neq R(\pi_{S^*,T}, k_2)\right]$$

пренебрежимо мала.

5. Вероятность $\Pr[\exists k \mid R(\pi_{S^*,T}, k) = \perp_T]$ пренебрежимо мала.

Теорема 7.1. *Если существует генератор псевдослучайных чисел, то существует интерактивный протокол привязки к биту.*

Доказательство. Определим протокол привязки для бита $\sigma \in \{0,1\}$. Возьмём генератор псевдослучайных чисел $G_n : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^{3n}$. Алгоритм $T(1^n)$ генерирует случайную строку $r \leftarrow U_{3n}$ и посылает её S. Алгоритм $S(1^n, \sigma)$ ожидает получения строки $r \in \{0,1\}^{3n}$, генерирует строку $s \leftarrow U_n$ и посылает сообщение

$$t = \begin{cases} G(s) \oplus r, & \sigma = 1, \\ G(s), & \sigma = 0. \end{cases}$$

Ключом для этой привязки будет $k = \sigma s$.

Алгоритм $R(1^n, (r,t), k)$ проверяет, что все длины строк в привязке соответствуют ожидаемым: $|r| = |t| = 3n$, $|k| = n + 1$. Если длины неправильные, то R обвиняет соответствующую сторону. После этого алгоритм R по $k = \sigma s$ вычисляет $t \oplus G(s)$:

- если получилось 0^{3n}, то проверяет, что $\sigma = 0$, и выдаётся 0;
- если получилось r, то проверяет, что $\sigma = 1$, и выдаётся 1;
- если получилось что-то ещё, то выдаёт $\perp_S$.

Свойства 1, 2 и 5 выполняются по построению. Свойство 3 означает, что следующие случайные величины $\langle r, G_n(s)\rangle$ и $\langle r, G_n(s) \oplus r\rangle$ должны быть вычислительно неотличимы. Если мы умеем их различать, то умеем одну из них отличать от $\langle r, U_{3n}\rangle$, а это позволяет взломать генератор G_n. Осталось проверить свойство 4. Давайте оценим

$$\Pr\left[\exists s_0, s_1 \mid G_n(s_0) \oplus t = 0^{3n}, G_n(s_1) \oplus t = r\right] = \Pr\left[\exists s_0, s_1 \mid G_n(s_0) \oplus G_n(s_1) = r\right] \leq \frac{2^{2n}}{2^{3n}} = 2^{-n}.$$

□

7.2. Протокол подбрасывания монетки

Определение 7.3. *Интерактивный протокол подбрасывания монетки* — это полиномиальный (по суммарному времени и по количеству раундов) интерактивный протокол, заданный полиномиальными вероятностными алгоритмами $A(1^n, h)$ и $B(1^n, h)$, и детерминированный полиномиальный алгоритм $D(1^n, h)$, где A и B — это алгоритмы сторон, а D — алгоритм, позволяющий по истории общения получить результат подбрасывания монетки. Стороны запускают D после завершения протокола и определяют результат. Для стороны A и любого противника B^* должны выполняться следующие свойства (интересы стороны A):

1. вероятность $\Pr[D(\pi_{A,B^*}) = \perp_A]$ пренебрежимо мала,

2. для любого $\sigma \in \{0,1\}$ $\Pr\big[R(\pi_{A,B^*}) = \sigma\big] \le \frac{1}{2} + \alpha_n$, где α_n — пренебрежимо мала.

Такие же свойства должны выполняться и для стороны B и любого противника A^*.

Теорема 7.2. *Если существует интерактивный протокол привязки к биту, то существует и интерактивный протокол подбрасывания монетки.*

Доказательство. Пусть (S, T, R) — интерактивный протокол привязки. Сторона A генерирует бит σ и запускает алгоритм привязки $S(\sigma)$, сторона B запускает алгоритм T; в конце протокола обе стороны знают привязку $c(\sigma)$, а сторона A ещё дополнительно знает ключ $k(\sigma)$. Потом сторона B генерирует бит τ и посылает его алгоритму A, а сторона A в ответ посылает ключ $k(\sigma)$.

Алгоритм $C(c(\sigma), \tau, k(\sigma))$ запускает алгоритм $R(c(\sigma), k(\sigma))$ для проверки для привязки. Если алгоритм проверки привязки обвиняет какую-то сторону, то C обвиняет соответствующую сторону. В противном случае C выдаёт $\sigma \oplus \tau$.

Давайте проверим, что интересы стороны A соблюдаются. Свойство 1 следует из протокола привязки (т.к. обвинение стороны возможно только в протоколе привязки). Предположим, что второе свойство нарушается. Тогда B^* может подбирать бит τ так, чтобы угадывать σ с нетривиальной вероятностью, а значит B^* можно использовать для взлома протокола привязки.

Интересы стороны B соблюдаются из-за недвусмысленности протокола привязки, поэтому вероятность того, что A сможет подменить ключ пренебрежимо мала. □

8. Протоколы с нулевым разглашением

Пусть алгоритм $A(1^n, x, e)$, где $x \in D_n$, $e \leftarrow \nu_n$, общается с некоторой полиномиальной схемой C_n, которая уже имеет некоторую информацию о x и e, а именно C_n знает значение функции $g(1^n, x, e)$. Пусть имеется ещё одна функция $f(1^n, x, e)$. Давайте определим, что значит, алгоритм A *разглашает* информацию $f(1^n, x, e)$, если противнику уже известна информация $g(1^n, x, e)$ о входах x, e (для краткости будем опускать параметр 1^n).

Определение 8.1. Будем говорить, что алгоритм A *разглашает только f при известном g на области D_n*, если существует полиномиальный вероятностный алгоритм M, который для любой последовательности слов $\{x_n \in D_n\}$ и любой последовательности полиномиальных схем C_n получая на вход $f(x_n, e)$ и схему C_n в качестве чёрного ящика (т.е. как оракул) генерирует случайную величину $\alpha_n(x_n, e)$, вычислительно неотличимую от протокола общения $\beta_n(x_n, e)$ между алгоритмом $A(x_n, e)$ и схемой $C_n(g(x_n, e), \cdot)$ при известном $g(x_n, e)$ (т.е. случайные величины $g(x_n, e)\alpha_n(x_n, e)$ и $g(x_n, e)\beta_n(x_n, e)$ вычислительно неотличимы). Вероятность берётся по выбору $e \leftarrow \nu_n$ и случайным битам алгоритмов $A(x_n, e)$ и M. Множество D_n называется *областью неразглашения алгоритма*, а алгоритм M — *симулятором*.

Пример 8.1. Пусть $e \leftarrow U_n$, а A посылает $x \oplus e$. Этот алгоритм имеет нулевое разглашение. Симулятору достаточно выдать случайную строку из U_n.

Пример 8.2. Пусть дана схема шифрования K, E, D с открытым ключом. Для открытого ключа e алгоритм шифрования $E(e, x)$ разглашает пару $(|x|, e)$ при известном e. Действительно, $E(e, x)$ вычислительно неотличима от $E(e, 0^{|x|})$. Симулятор M выдаёт $E(e, 0^{|x|})$.

Пример 8.3. Пусть дан интерактивный протокол привязки S, T, R для бита. Алгоритм S имеет нулевое разглашение. Симулятор по схеме C моделирует общение алгоритма $S(0)$ и схемы C и выдаёт протокол общения.

Лемма 8.1. *Выполняются следующие свойства разглашения.*

1. *Для любых функций f, g, h, если A разглашает только f при известном g, то A разглашает только пару f, h при известном g.*

2. *Для любых функций f, g, h, если A разглашает только f при известной паре g, h, то A разглашает только f при известном g.*

Определение 8.2. Если A разглашает только g при известном g, то мы будем говорить, что A имеет *нулевое разглашение при известном g*. Если g является константной функцией, то мы говорим, что A *разглашает только f*. Если при этом ещё и f является константной функцией, то мы говорим, что A имеет *нулевое разглашение*.

Определение 8.3. Пусть A и B вероятностные полиномиальные интерактивные алгоритмы. Выполним сначала A на паре входов x и e, а потом B на паре входов (x, c) и e, где c — протокол общения, полученный в ходе выполнения A. Полученный алгоритм будем обозначать как (A, B).

Теорема 8.1 (о неразглашении при последовательном выполнении)**.** *Пусть $g(x, e) = (e, k(x, e))$, где k — произвольная функция. Допустим, что алгоритм $A(x, e)$ разглашает только $f(x, e)$ при известном $g(x, e)$ на области D_n, а алгоритм $B(x, e)$ разглашает только $h(x, e)$ при известном $g(x, e)$ на той же области D_n. Пусть также хотя бы одна из функция $f(x, e)$ или $h(x, e)$ полиномиально вычислима. Тогда алгоритм (A, B) разглашает только пару $(f(x, e), h(x, e))$ при известном $g(x, e)$ на области D_n.*

Доказательство. Пусть M и N — симуляторы для A и B соответственно. Построим симулятор для (A, B). Алгоритмы A и B получают на вход некоторое неизвестное x и случайное e и после этого по очереди беседуют с некоторой схемой C, которой известно $g(x, e)$. В результате получается протокол беседы $\pi_{(A,B)(x,e),C(g(x,e))}$, который является случайной величиной с параметром x.

Симулятор для (A, B) должен по схеме C и подсказке о x и e в виде пары $f(x, e), g(x, e)$ сгенерировать случайную величину, вычислительно неотличимую от случайной величины $\pi_{(A,B)(x,e),C(g(x,e))}$ при известном $g(x, e)$.

В дальнейшем совместно распределённые случайные величины $f(x, e), g(x, e)$ и $h(x, e)$ будем для краткости обозначать f, g и h соответственно. Через C^w мы будем обозначать схему C, в которую подставили (зашили) слово w (т.е. первые $|w| + 1$ символ входа равны слову $w\$$, а остальные входы свободны).

Общение алгоритма $(A, B)(x, e)$ со схемой C устроено так: схема C читает g и превращается в C^g, затем беседует с $A(x, e)$, в результате чего получается некоторый протокол общения u, потом алгоритм $B(x, e)$ общается уже со схемой C^{gu}. Давайте обозначим протокол общения B и C^{gu} через $\mathcal{B}(C^{gu})$. Тогда весь протокол общения $(A, B)(x, e)$ со схемой C — это конкатенация случайных величин u и $\mathcal{B}(C^{gu})$.

Симулятор для (A, B) должен по f, h и C сгенерировать некоторую случайную величину, вычислительно неотличимую от $u\mathcal{B}(C^{gu})$ при известном g. Для этого он сначала запускает симулятор M на f и C (значение g известно), в результате чего получается протокол общения $\tilde{u}$. После этого он запускает N на входе h и $C^{\square\tilde{u}}$, в результате чего получается последовательность сообщений $\mathcal{N}(C^{g\tilde{u}})$. В результате симулятор выдаёт $\tilde{u}\mathcal{N}(C^{g\tilde{u}})$.

Отметим, что по свойству симулятора N известно, что $\mathcal{N}(C^{g\tilde{u}})$ вычислительно неотличима от протокола общения $B(x, e)$ и $C^{g\tilde{u}}$.

Зафиксируем произвольную последовательность строк x_n полиномиальной длины. Нам нужно показать, что случайные величины

$$\alpha = \tilde{u}\mathcal{N}(C^{g\tilde{u}}) \quad \text{и} \quad \gamma = u\mathcal{B}(C^{gu})$$

вычислительно неотличимы при известном g. Докажем, что эти две случайные величины неотличимы от какой-нибудь третьей случайной величины и потом воспользуемся транзитивностью. Рассмотрим два случая.

1. Пусть h является полиномиально вычислимой. Рассмотрим случайную величину

$$\beta = u\mathcal{N}(C^{gu}).$$

Покажем сначала, что β вычислительно неотличима от α. Так как мы зафиксировали x_n, e является частью g, а функция h полиномиально вычислима, то следующее преобразование можно вычислить схемой полиномиального размера:

$$gv \to gv\mathcal{N}(C^{gv}).$$

Применяя это преобразование к gu мы получим $g\beta$, а применяя его к $g\tilde{u}$ получим $g\alpha$. Исходные gu и $g\tilde{u}$ вычислительно неотличимы, значит неотличимы и $g\alpha$ и $g\beta$.

Покажем теперь неотличимость γ и β. Если мы зафиксируем случайные биты A, то u будет функцией от g (e входит в состав g), которую можно вычислить схемой полиномиального размера. Поэтому нам достаточно показать вычислительную неотличимость

$$g\mathcal{B}(C^{gu}) \quad \text{и} \quad g\mathcal{N}(C^{gu}).$$

„Зашьём“ схему для u в схему C^{gu}, в результате получится семейство схем H^g:

$$H^g \equiv C^{gu}.$$

По свойству симулятора N случайные величины $g\mathcal{B}(H^g)$ и $g\mathcal{N}(H^g)$ вычислительно неотличимы, следовательно неотличимы и $g\mathcal{B}(C^{gu})$ и $g\mathcal{N}(C^{gu})$ (эти величины имеют такие же распределения, т.к. симулятор общается со схемой как с чёрным ящиком, и поэтому не видит разницы между H^g и C^{gu}). Из этого, как мы уже заметили, следует вычислительная неотличимость и γ и β.

2. Пусть f является полиномиально вычислимой. Рассмотрим случайную величину

$$\beta = \tilde{u}\mathcal{N}(C^{gu}).$$

Доказательство устроено аналогично. Для неотличимости α и β при известном g нам нужно, чтобы f была полиномиально вычислимой функцией от g, x — это позволяет вычислить $\tilde{u}$ по g и случайным битам M схемой полиномиального размера. А для отличимости α и β при известном g нам опять нужно, чтобы e было полиномиально вычислимой функцией от g, x, что позволяет вычислить $\mathcal{B}(C^{gu})$ по g и u вероятностной схемой полиномиального размера.

□

Замечание 8.1. Теорема о неразглашении при повторении выполняется и в ситуации, когда алгоритму B дополнительно на вход подаётся протокол u общения A и C_n, а так же использованные при этом случайные биты A.

Теорема 8.2 (о неразглашении при последовательном выполнении, улучшенная)**.** *Пусть $g(x,e) = (e, k(x,e))$, где k — произвольная функция. Допустим, что алгоритм $A(x,e)$ разглашает только $f(x,e)$ при известном $g(x,e)$ на области D_n, а алгоритм $B(u,r,x,e)$ разглашает только $h(x,e)$ при известном $g(x,e)$ на области E_n. Пусть также хотя бы одна из функция $f(x,e)$ или $h(x,e)$ полиномиально вычислима. Пусть наконец, для всех $x \in D_n$ для протокола общения и алгоритма A с любой схемой C_n полиномиального размера и его случайных битов r с почти единичной вероятностью $(u,r,x) \in E_n$. Тогда алгоритм (A,B) разглашает только пару $(f(x,e), h(x,e))$ при известном $g(x,e)$ на области D_n.*

Определение 8.4. Для интерактивного алгоритма A через A^k будем обозначать последовательное выполнение A на входах $(x,1,e),(x,2,e),\ldots,(x,k,e)$.

Теорема 8.3 (о неразглашении при последовательном применении полиномиального числа алгоритмов)**.** *Пусть $g(x,e)=(e,h(x,e))$, где h — произвольная функция, а $f(x,e)$ некоторая полиномиально вычислимая функция. Если алгоритм A разглашает только $f(x,e)$ при известном $g(x,e)$, то алгоритм $A^{k(n)}$ для некоторого полинома k разглашает только $f(x,e)$ при известном $g(x,e)$.*

Доказательство. Обозначим через M симулятор для алгоритма A и построим симулятор M^k для алгоритма A^k. Такой симулятор должен по входам f и C породить случайную величину, вычислительно неотличимую от протокола общение $A^k(x,e)$ и C^g.

Обозначим через $\mathcal{A}_i(C,e)$ протокол общения алгоритма $A(x,i,e)$ со схемой C^g, а через $\mathcal{M}_i(C,e)$, соответственно, результат работы симулятора M на входах f и C.

Зафиксируем произвольную полиномиальную схему C. Протокол общения γ алгоритмов $A^k(x,e)$ и C^g можно получить последовательным применением к пустой строке для $j=1,\ldots,k$ вероятностных операторов

$$R_i^A : u \to u\mathcal{A}_j(C^{gu},e).$$

Если применять „близкие“ операторы

$$R_i^M : u \to u\mathcal{M}_j(C^{gu},e),$$

то получится некоторая случайная величина α. Покажем, что α вычислительно неотличима от γ при известном g.

Зафиксируем произвольную последовательность x_n слов полиномиальной длины для алгоритма A^k. Рассмотрим гибридные случайные величины $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_k$, которые получаются смешиванием этих двух вероятностных операторов: для получения случайной величины β_i мы сначала последовательно применяем $R_1^A,\ldots,R_i^A$, а потом $R_{i+1}^M,\ldots,R_k^M$. Покажем, что две последовательные случайные величины β_{i-1} и β_i неотличимы при известном g (из этого будет следовать неотличимость $\gamma=\beta_0$ и $\alpha=\beta_k$).

Обозначим через δ случайную величину, полученную применение к пустой строке операторов $R_1^A,\ldots,R_i^A$, т.е. это протокол первых $i-1$ запуска A. Через $F(u,e)$ обозначим случайную величину, полученную из строки u путём последовательного применения $R_{i+1}^M,\ldots,R_k^M$. В этих обозначениях

$$\beta_i = F(\delta\mathcal{A}_i(C^{g\delta},e),e), \quad \beta_{i-1} = F(\delta\mathcal{M}_i(C^{g\delta},e),e).$$

Поскольку оператор $F(u,e)$ можно вычислить вероятностной схемой полиномиального размера по x_n,e и u (f полиномиально вычислимо), нам достаточно доказать неотличимость $\delta\mathcal{A}_i(C^{g\delta},e)$ и $\delta\mathcal{M}_i(C^{g\delta},e)$ при известном g. Слово δ зависит от e и случайных битов, использованных A в первых $i-1$ запусках. Давайте зафиксируем эти биты. Теперь δ становится функцией от e (x_n мы тоже зафиксировали), а следовательно вычислима схемой полиномиального размера. Поэтому достаточно доказать неотличимость $\mathcal{A}_i(C^{g\delta},e)$ и $\mathcal{M}_i(C^{g\delta},e)$ при известном g. Теперь „зашьём“ вычисление δ в схему. Получится схема $H^g\equiv C^{g\delta}$. Тогда

$$\mathcal{A}_i(C^{g\delta},e)=\mathcal{A}_i(H^g,e), \quad \mathcal{M}_i(C^{g\delta},e)=\mathcal{M}_i(H^g,e).$$

По определению симулятора $\mathcal{A}_i(H^g,e)$ и $\mathcal{M}_i(H^g,e)$ вычислительно неотличимы при известном g. Это наблюдение завершает доказательство. □

8.1. Языки с нулевым разглашением

Определение 8.5. Для языка L мы будем говорить, что он обладает *доказательством с нулевым разглашением*, если существуют такие полиномиальные вероятностные интерактивные алгоритмы P и V:

1. если $x \in L$, то существует y, $|y| \leq p(x)$: $\Pr[\text{out}_{P(x,y),V(x)=1}] \geq 1 - \alpha_n$,
2. если $x \notin L$, то для любой функции P^*: $\Pr[\text{out}_{P^*,V(x)=1}] < \alpha_n$,
3. $P(x, y)$ разглашает только $(x, L(x))$,

где α_n пренебрежимо мала.

Определение 8.6. ZPK — это класс языков, для которые обладают доказательством с нулевым разглашением.

Замечание 8.2. GI обладает протоколом со статистически неотличимым нулевым разглашением (т.е. в определении нулевого разглашения можно заменить вычислительную неотличимость на статистическую).

Определение 8.7. Язык изоморфизма графов GI — это язык пар графов (G_0, G_1) таких, что G_1 изоморфен G_0.

Лемма 8.2. $GI \in ZKP$.

Доказательство. Алгоритм P на своей стороне получает G_0, G_1 и перестановку вершин $\tau \in S_n$: $\tau(G_0) = G_1$ (n обозначает число вершин). Алгоритм P выбирает случайную перестановку $\pi \leftarrow U(S_n)$ и посылает $H = \pi(G_0)$ алгоритму V. Алгоритм V в ответ посылает случайный бит $\alpha \in \{0, 1\}$. В ответ алгоритм P вычисляет $\sigma = \pi \circ \tau^{-\alpha}$ (т.е. такую перестановку, что $\sigma(G_\alpha) = \pi(G_0)$). Алгоритм V на своей стороне проверяет, что $\sigma(G_0) = H$ и принимает, если это так. Этот протокол нужно повторить полиномиальное число раз для уменьшения ошибки.

Условие 1 выполняется по построению. Условие 2 выполняется, т.к. на каждой итерации алгоритм V ловит алгоритм P^* с вероятностью $\frac{1}{2}$. Остаётся проверить условие 3 и тут нам потребует теорема 8.3.

Пусть F — это схема, с которой общается (честный) алгоритм P. Будем рассматривать поведение только на входе из языка, т.е. на паре изоморфных графов. Давайте считать, что F — детерминирована и не нарушает протокол, т.е. $F(H)$ — это один бит (который выбирается детерминировано). Тогда протокол задаётся следующей тройкой из множества

$$\{(H, \alpha, \sigma) : \alpha \in \{0, 1\}, \sigma \in S_n, F(H) = \alpha, \sigma(G_\alpha) = H\}.$$

Будем называть это множество *множеством хороших троек*.

Давайте покажем, что протокол (как случайная величина) равномерно распределен на множестве хороших троек. Рассмотрим такую хорошую тройку (H, α, σ). Так как $\sigma = \pi \circ \tau^{-\alpha}$, то по σ, α и τ можно однозначно восстановить π, а по π однозначно получается H. Обратно по π можно восстановить хорошую тройку ($\alpha = F(\pi(G_0))$). Таким образом хороших троек столько же, сколько различных перестановок π, а именно $n!$.

Теперь нам нужно научиться генерировать равномерное распределение на хороших тройках. Будем генерировать следующим образом: $\alpha \leftarrow U_1$, $\sigma \leftarrow U(S_n)$, $H = \sigma(G_\alpha)$, если теперь $F(H) = \alpha$, то вернём (H, α, σ), иначе вернём $\perp$. Заметим, что

$$\Pr[F(\sigma(G_\alpha)) = \alpha] = \frac{1}{2}\Pr[F(\sigma(G_0)) = 0] + \frac{1}{2}\Pr[F(\sigma(G_1)) = 1].$$

Так как σ выбирается случайно, а $G_0 \simeq G_1$, то это то же самое, что

$$\Pr[F(\sigma(G_\alpha)) = \alpha] = \frac{1}{2}\Pr[F(\sigma(G_0)) = 0] + \frac{1}{2}\Pr[F(\sigma(G_0)) = 1] = \frac{1}{2}.$$

Теперь этот алгоритм можно повторить n раз и получить распределение, неотличимое от равномерного.

Если F выдаст не один бит, а некоторую строку β, то симулятор должен выдать „оборванный протокол“ (H, β).

Мы доказали эту теорему для детерминированного F. Если F использует случайные биты, для каждых фиксированных значений этих битов теорема верна, значит и для случайного выбора случайных битов тоже. □

Покажем, что если существуют односторонние функции, то $NP \subseteq ZPK$.

Теорема 8.4. *Если существуют односторонние функции, тогда для любого $L \in NP$ существует вероятностный полиномиальные интерактивные алгоритмы P и V:*

1. *если $x \in L$, то любой подсказки y для x, $|y| \le p(x)$: $\Pr[\mathrm{out}_{P(x,y),V(x)=1}] \ge 1 - \alpha_n$,*
2. *если $x \notin L$, то для любой функции P^*: $\Pr[\mathrm{out}_{P^*,V(x)=1}] < \alpha_n$,*
3. *$P(x, y)$ разглашает только $(x, R(x, y))$, где R — предикат задающий L.*

Доказательство. Достаточно доказать для какого-нибудь NP-полного языка относительно сведений, которые сохраняют подсказки. Пусть $L \in NP$ с предикатом R, L^* — NP-полный с предикатом $R*$. Пусть существует полиномиально вычислимая функция $f : x \in L \iff f(x) \in L^*$, и существует полиномиально вычислимая функция g : $R(x, y) = 1 \implies R(f(x), g(y))$. Если мы докажем существование P и V для L^*, то из этого легко можно построить P и V для L с необходимыми свойствами.

Будем доказывать для языка $3-COL$ неориентированных три-раскрашиваемых графов.

Будем доказывать с усиленным свойством 2.

2'. *Существует такой оракульный вероятностный полиномиальный по времени алгоритм A, что если для какой-то вероятностной функции P^* и любого x*

$$\Pr[\mathrm{out}_{P^*,V(x)} = 1] = p,$$

то A^{P^*} выдаёт подсказку для x с вероятностью не менее $p - \alpha(|x|)$, где $\alpha(n)$ пренебрежимо мало.

(Это свойство гарантирует, что если p не пренебрежимо мало, то $x \in L$.)

Алгоритм. P на входе (G, σ) выбирает случайную перестановку $\pi \leftarrow S_3$ и вычисляет $\alpha = \pi \circ \sigma$. После этого запускается интерактивный алгоритм привязки для цвета каждой вершины. Если на этом этапе V заблокировал, то протокол останавливается. V выбирает случайное ребро (u, v). P в ответ посылает привязки k_u и k_v для вершин u и v. V проверяет привязки. Если привязки корректны и цвета различные, то попытка успешна. В противном случае V возвращает 0. Нужно повторить этот алгоритм $2n|E|$ раз.

Можно считать, что $p \ge e^{-n}$ (иначе p пренебрежимо мало). Определим вероятности $p_1, p_2, \ldots, p_{2n|E|}$, где $p_i = \Pr[\text{успех в раунде } i \mid \text{успех в предыдущих раундах}]$. Тогда

$$p = \prod_{i=1}^{2n|E|} p_i.$$

Тогда по предположению существует i: $p_i > e^{-\frac{1}{2|E|}} \geq 1 - \frac{1}{2|E|}$. Построим алгоритм для поиска раскраски A. Этот алгоритм будет общаться с $P*$: в раунде j алгоритм A будет спрашивать P^* про все рёбра (для этого мы будем подсовывать ей историю предыдущих $j-1$ раундов без истории j-го раунда). Если нам удалось найти раскраску, то возвращаем её. Если нет, то повторим этот раунд n раз. Для выбранного i вероятность p_i большая — если мы спросим все рёбра, то вероятность успеха как минимум $\frac{1}{2}$. После n повторений получается вероятность $1 - 2^{-n}$. Заметим, что построенный алгоритм найдёт раскраску только при условии, что в предыдущих раундах был успех, т.е.

$$\Pr[\text{найдёт раскарску в раунде } i \mid \text{успех в предыдущих раундах}] \approx 1.$$

Отсюда следует, что

$$\Pr[\text{найдёт раскарску в раунде } i] \geq \Pr[\text{успех в предыдущих раундах}] \geq p.$$

Осталось доказать нулевое разглашение. Алгоритм ведёт себя одинаково в каждом раунде, так что достаточно доказать для одного раунда. Будем строить симулятор M. Возьмём β — случайную раскраску в три цвета и запустим протокол привязки для цвета каждой вершины, в результате чего получим историю S_β. Запустим $V^*(\pi_{S_\beta, V^*})$ и получим ребро (u, v). Если $\beta(u) \neq \beta(v)$, то выдадим ключи k_u и k_v. Иначе повторим. Всего n повторений. Если нам ни разу не повезло, то вернём пустую строку.

Давайте сначала покажем, что каждую попытку нам везёт с вероятностью $2/3$.

$$\begin{aligned}\Pr[V^*(\pi_{S_\beta,V^*}), \beta(u) \neq \beta(v)] &= \sum_{\substack{(u,v)\in E\\ a,b\in\{1,2,3\}\\ a\neq b}} \Pr[V^*(\pi_{S_{\beta|v\leftarrow a,u\leftarrow b},V^*}), \beta(u) = a, \beta(v) = b] \\ &= \sum_{\substack{(u,v)\in E\\ a,b\in\{1,2,3\}\\ a\neq b}} \frac{1}{9}\Pr[V^*(\pi_{S_{\beta|v\leftarrow a,u\leftarrow b},V^*})].\end{aligned}$$

По свойствам привязки существует случайная величина Θ_{V^*}, вычислительно неотличимая от случайной величины $\pi_{S_{\beta|v\leftarrow a,u\leftarrow b},V^*}$. Тогда

$$= \sum_{\substack{(u,v)\in E\\ a,b\in\{1,2,3\}\\ a\neq b}} \frac{1}{9}\Pr[V^*(\pi_{S_{\beta|v\leftarrow a,u\leftarrow b},V^*})] \approx \sum_{\substack{(u,v)\in E\\ a,b\in\{1,2,3\}\\ a\neq b}} \frac{1}{9}\Pr[V^*(\Theta_{V^*})] = \frac{6}{9}\sum_{(u,v)\in E}\Pr[V^*(\Theta_{V^*})] = \frac{2}{3}.$$

Осталось показать, что полученное распределение будет вычислительно неотличимо от настоящего. Обозначим полученное распределение η.

$$\Pr[\eta = d] = \Pr[\pi_{P_\beta,V^*} = d \mid \beta(u) \neq \beta(v)]. \tag{1}$$

Пусть A — схема полиномиального размера (различитель). Мы хотим показать, что

$$\Pr[A(\pi_{P_\alpha,V^*}) = 1] \approx \Pr[A(\eta) = 1].$$

По определению условной вероятности из (1) получаем

$$\Pr[A(\eta) = 1] \approx \frac{3}{2}\Pr[A(\pi_{P_\beta,V^*}) = 1, \beta(u) \neq \beta(v)].$$

С другой стороны

$$\Pr[A(\pi_{P_\alpha,V^*}) = 1] = \sum_{(u,v)}\sum_{a\neq b}\Pr[A(\pi_{P_\alpha,V^*}) = 1, V^*(\pi_{S_\alpha,V^*}) = (u, v), \alpha(u) = a, \alpha(v) = b].$$

Применим тот же трюк с избавлением зависимости от a и b, получаем

$$= \sum_{(u,v)} \sum_{a \neq b} \Pr[A(\pi_{P_{\alpha|u \leftarrow a, v \leftarrow b}, V^*}) = 1, V^*(\pi_{S_{\alpha|u \leftarrow a, v \leftarrow b}, V^*}) = (u,v), \alpha(u) = a, \alpha(v) = b]$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{(u,v)} \sum_{a \neq b} \Pr[A(\pi_{P_{\alpha|u \leftarrow a, v \leftarrow b}, V^*}) = 1, V^*(\pi_{S_{\alpha|u \leftarrow a, v \leftarrow b}, V^*}) = (u,v)]. \quad (2)$$

Раскладывая таким же образом $\Pr[A(\eta) = 1]$ получаем

$$\approx \frac{2}{3} \sum_{(u,v)} \sum_{a \neq b} \Pr[A(\pi_{P_{\beta|u \leftarrow a, v \leftarrow b}, V^*}) = 1, V^*(\pi_{S_{\beta|u \leftarrow a, v \leftarrow b}, V*}) = (u,v), \beta(u) = a, \beta(v) = b]$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{(u,v)} \sum_{a \neq b} \Pr[A(\pi_{P_{\beta|u \leftarrow a, v \leftarrow b}, V^*}) = 1, V^*(\pi_{S_{\beta|u \leftarrow a, v \leftarrow b}, V*}) = (u,v)]. \quad (3)$$

Мы хотим показать, что можно построить распределение, вычислительно неотличимое от

$$\pi_{S_{\beta|u \leftarrow a, v \leftarrow b}, V*} = \pi_{P_{\beta|u \leftarrow a, v \leftarrow b}, V*}, (k_u, k_v)$$

для какой-то фиксированной раскраски β. Проблема только в генерации k_u и k_v, т.к. мы не знаем, при помощи каких случайных битов они сгенерированы, но знаем a и b. Поэтому можно сгенерировать k_u и k_v при помощи других случайных бит и воспользоваться свойством неразглашения протокола привязки. Получится некоторое распределение $\Theta_{u,v,a,b}$, которое "не зависит" от β (тут мы пользуемся нулевым разглашением протокола привязки). Поэтому (2) и (3) примерно равны. □

Список литературы

[1] Н.К. Верещагин. *Курс лекций "Теоретико-сложностные проблемы криптографии"*, МГУ, http://lpcs.math.msu.su/~ver/teaching/cryptography/index.html.

[2] Д.М. Ицыксон. *Курс "Теоретико-сложностные основы криптографии"*, CS центр, https://compsciclub.ru/courses/cryptography-foundations/2016-spring/.

[3] O. Goldreich. *Foundations of cryptography.*

[4] J. Håstad, R. Impagliazzo, L.A. Levin, M. Luby. *A Pseudorandom Generator from any One-way Function.* SIAM J. Comput. 28, 4 (March 1999), 1364-1396.
DOI: https://doi.org/10.1137/S0097539793244708

[5] J. Katz, Y. Lindell. *Introduction to Modern Cryptography.*

Todo list