Основные элементы математического анализа, используемые в теории оптимизации

Мальковский Н. В.

Санкт-Петербургский Академический Университет

Скалярное произведение

Определение

Пусть X – линейное пространство над $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Скалярным произведением на X называется функция $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$(или $\mathbb{C}$), обладающей следующими свойствами

1. *Симметричность*
$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, x, y \in X,$$
где $\overline{y}$ – комплексное сопряжение y.
2. *Линейность*
$$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle,\ \ x, y \in X,$$
$$\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle,\ \ x \in X,\ \ \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}).$$
3. *Положительная определенность, $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$ и*
$$\langle x, x \rangle \in \mathbb{R} \geq 0$$
$$\langle x, x \rangle \in \mathbb{R} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Скалярное произведение

Стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$: $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$, тогда

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^T y = y^T x.$$

Последнее обозначение – стандартное матричное произведение, в дальнейшем будет использовано в основном только оно.

Скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = y^\dagger x.$$

Скалярное произведение функций из $C([a, b])$:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

Определение

Пусть X *– линейное пространство над* $\mathbb{R}$*(или* $\mathbb{C}$*).* *__Нормой__* *на* X *называется функция* $||\cdot||: X \to \mathbb{R}$*, для которой выполняются следующие свойства*

1. *Строгая положительная определенность*
$$||x|| \geq 0, \ ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \ x \in X.$$
2. *Гомогенность*
$$||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||, \quad x \in X, \ \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}).$$
3. *Неравенство треугольника*
$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \quad x, y \in X.$$

Норма и нормированные пространства

Норма, индуцированная скалярным произведением: если $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение, то $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ – норма.

p-норма в $\mathbb{R}^n$: пусть $p \geq 1$, тогда функция

$$g(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

является нормой. Принято обозначение $||x||_p := g(x)$. При $p = 2$ получаем *евклидову норму*, она же является нормой, индуцированной стандартным скалярным произведением в $\mathbb{R}^n$:

$$||x||_2^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x^T x.$$

В дальнейшем по умолчанию в $\mathbb{R}^n$ будет использоваться именно эта норма.

При $p = 1$ получаем
$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$
Функция $||x||_\infty = \lim_{p\to\infty} ||x||_p$ также является нормой:

$$||x||_\infty = \lim_{p\to\infty} ||x||_p = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} = \lim_{p\to\infty} max_j|x_j| \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|x_i|}{max_j|x_j|}\right)^p}_{1\leq\ldots\leq n}\right)^{1/p}$$
$$= max_j|x_j|.$$
Метрика, индуцированная нормой: если $||\cdot||$ – норма, то $\rho(x, y) = ||x - y||$ – метрика.

Операторная и двойственная нормы

Если $||\cdot||$ – норма в X, индуцированная скалярным произведением, то

$$||A||_{op} := \sup_{x \in X} \frac{||Ax||}{||x||}$$

норма в пространстве ограниченных операторов над X.

Двойственная норма: если $||\cdot||$ – норма в X, то

$$||s||_* := sup_{x \in X} \frac{|\langle s, x \rangle|}{||x||}$$

является нормой в пространстве линейных функционалов над X (обозначается X^*). Двойственная норма является операторной нормой: $||s||_* = ||\langle s, \cdot \rangle||_{op}$. Основное свойство этих норм:

$$||Ax|| \leq ||A||_{op}||x||$$
$$\langle s, x \rangle \leq ||s||_* ||x||.$$

Операторная и двойственная нормы

Пусть $p, q > 0, p^{-1} + q^{-1} = 1$. Из неравенства Гёльдера

$$\frac{|\langle s, x\rangle|}{||x||_p} \leq \frac{||s||_q ||x||_p}{||x||_p} = ||s||_q,$$

причем равенство достигается при $s = x$, а значит $||\cdot||_q$ – норма, двойственная к $||\cdot||_p$. В частности, евиклидова норма двойственна сама себе. Также, $||\cdot||_1$ двойственна к $||\cdot||_\infty$.

Наконец, двойственность симметрична, т.е.

$$||x||_{**} = ||x||.$$

Дифференцируемость одномерной функции

Определение

Пусть $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x – внутренняя точка $\mathcal{D}$. Говорят, что f дифференцируема в точке x, если существует такое a, что выполняется

$$f(x+h) = f(x) + ah + o(h).$$

Число a принято называть производной f в точке x.

Замечание 1. Функция дифференцируема на множестве $A \in \mathcal{D}$, если она дифференцируема в каждой точке A, обозначается $f \in C^{(1)}(A)$. *Производная* функции f – функция, сопоставляющая каждой точке производную f в этой точке, обозначается f', $\frac{df}{dx}$ или $\frac{d}{dx}f$.
Замечание 2. Если f' также является дифференцируемой функцией, то говорят, что f – дважды дифференцируема. Вторая производная f – производная производной f, обозначается f'', $\frac{d^2f}{dx^2}$ или $\frac{d^2}{dx^2}f$. Последующие производные вводятся индуктивно, обозначаются $f^{(n)}$, $\frac{d^nf}{dx^n}$ или $\frac{d^n}{dx^n}$, для дифференцируемости используется обозначение $f \in C^{(n)}(A)$.

Ряд Тейлора

Определение

Пусть $f \in C^{(n)}([a,b])$, $x \in (a,b)$, рядом Тейлора функции f в точке x называется следующее разложение f в точке x

$$f(x+h) = \sum_{i=0}^{n} f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!} + R(x,h).$$

Замечание 1. Остаток в форме Пеано:

$$f(x+h) = \sum_{i=0}^{n} f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!} + o(h^n).$$

Замечание 2. Остаток в форме Лагранжа ($f \in C^{(n+1)}([a,b])$): Существует точка $c \in (x, x+h)$, что выполняется

$$f(x+h) = \sum_{i=0}^{n} f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!} + f^{(n+1)}(c)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Замечание 3. Есть и другие формы остатка: интегральная, Коши и т. д.

Частные производные и градиент

Определение

Пусть $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_1 = \{z \mid z \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^{n-1},\ (z, y) \in \mathcal{D}\}$, $g \in \mathcal{D}_1 \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}$ *и при этом*

$$g(z) = f(z, x_2, \ldots, x_n).$$

Частной производной f *по переменной* x_1 *в точке* x *называется производная функции* g *в точке* x_1*, обозначается* $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$, $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x)$ *или* $\nabla_{x_1} f(x)$*.*
Аналогичным образом вводятся производные по переменным $x_2, \ldots, x_n$*.*

Определение

Вектор $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)^T$ *называется градиентом функции* f *в точке* x*.*
Обозначается $\nabla f(x)$*.*

Замечание. Дифференцируемость в многомерном случае: если существует линейное приближение $f(x+h) = f(x) + a^T h + o(||h||)$, то f имеет все частные производные и при этом $a = \nabla f(x)$.

Гессиан

Определение

Пусть $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f дифференцируема в точке x и при этом существует симметричная матрица H такая, что

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x)^T h + \frac{1}{2} h^T H h + o(||h||^2),$$

то f дважды дифференцируема в точке x, а матрицу H принято называть матрицей Гессе, гессианом или матрицей вторых производных и обозначать $\nabla^2 f(x)$.

Замечание 1. В этом определении правая часть неравенства является квадратичным приближением, что есть ни что иное как ряд Тейлора для многомерной функции.
Замечание 2. Если f дважды дифференцируема в точке x и дифференцируема в окрестности x, то $\nabla^2 f(x) = \nabla(\nabla f(x))$.

Выпуклость множеств

Определение

Подмножество $\mathcal{D}$ *некоторого линейного пространства над* $\mathbb{R}$ *называется выпуклым, если* $\forall t \in (0,1),\ x, y \in \mathcal{D}$ *выполняется*

$$tx + (1-t)y \in \mathcal{D}.$$

Выпуклость функций

Определение

Пусть $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое множество. Функция $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ называется выпуклой, если $\forall x, y \in \mathcal{D}, 0 < t < 1$ выполняется

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y).$$

Определение

Пусть $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое открытое множество. Функция $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ называется сильно выпуклой с константой $m > 0$, если $\forall x, y \in \mathcal{D}, 0 < t < 1$ выполняется

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y) - t(1-t)\frac{m}{2}||x-y||_2^2.$$

Замечание. Формально можно считать, что выпуклость – это сильная выпуклость с константой $m = 0$.

Условия выпуклости первого порядка

Теорема (Условия выпуклости первого порядка)

Если f дифференцируема, то сильная выпуклость f с параметром m равносильна

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{m}{2}||y - x||^2 \quad \forall x, y \in \mathcal{D}.$$

Док-во. Если f выпукла и дифференцируема, то для $0 < t < 1$

$$f(x + t(y - x)) \leq f(x) + t(f(y) - f(x)) - t(1 - t)\frac{m}{2}||x - y||^2.$$

После деления t и переноса слагаемых получаем

$$f(y) \geq f(x) + \frac{f(x + t(y - x)) - f(x)}{t} + (1 - t)\frac{m}{2}||x - y||^2.$$

Устремляя t к нулю получаем желаемое неравенство.

Условия выпуклости первого порядка

С другой стороны, если $x, y \in \mathcal{D}$, $z = tx + (1-t)y$ и выполняются условия

$$f(x) \geq f(z) + \nabla f(z)^T (x-z) + \frac{m}{2}||x-z||^2,\ f(y) \geq f(z) + \nabla f(z)^T (y-z) + \frac{m}{2}||y-z||^2,$$

то складывая первое неравенство умноженное на t и второе неравенство умноженное на $1-t$, учитывая $x - z = (1-t)(x-y),\ y - z = t(y-x)$ получаем

$$\begin{aligned} tf(x) + (1-t)f(y) &\geq f(z) + t(1-t)\nabla f(z)^T (x-y) + (1-t)t\nabla f(z)^T (y-x) \\ &+ t^2(1-t)\frac{m}{2}||x-y||^2 + (1-t)^2 t\frac{m}{2}||x-y||^2 \\ &= f(z) + t(1-t)\frac{m}{2}||x-y||^2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Условия выпуклости первого порядка

Другое эквивалентное определение можно получить следующим образом: сложив неравенства

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{m}{2}||x - y||^2$$

и

$$f(x) \geq f(y) + \nabla f(y)^T (x - y) + \frac{m}{2}||x - y||^2$$

получаем

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T (x - y) \geq m||x - y||^2.$$

В обратную сторону: используя формулу Ньютона-Лейбница

$$\begin{aligned}
f(y) &= f(x) + \int_0^1 \nabla f(x + t(y - x))^T (y - x) dt \\
&= f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \int_0^1 \underbrace{(\nabla f(x + t(y - x)) - \nabla f(x))^T (y - x)}_{\geq tm||y - x||^2} dt \\
&\geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{m}{2}||y - x||^2
\end{aligned}$$

Условия выпуклости второго порядка

Теорема (Условия выпуклости второго порядка)

Если f дважды дифференцируема, то сильная выпуклость f с параметром m равносильна

$$\nabla^2 f(x) \succeq mI \quad \forall x \in \mathcal{D}.$$

Док-во. В силу дифференцируемости f и сильной выпуклости f выполняется условие первого порядка

$$(\nabla f(x + t(y-x)) - \nabla f(x))^T t(y-x) \geq mt^2 ||x-y||^2.$$

Делим на t^2 и устремляем t к нулю:

$$(y-x)^T \nabla^2 f(x)(y-x) \geq m||x-y||^2 = (y-x)^T (mI)(y-x).$$

В обратную сторону: используя формулу Тейлора с остатком в интегрально форме

$$
\begin{aligned}
f(y) &= f(x) + \nabla f(x)^T (y-x) + \int_0^1 (y-x)^T \nabla^2 f(x + t(y-x))(y-x) dt \\
&\geq f(x) + \nabla f(x)^T (y-x) + \int_0^1 tm||y-x||^2 dt \\
&\geq f(x) + \nabla f(x)^T (y-x) + \frac{m}{2}||y-x||^2 \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Связь выпуклости множеств и функций

Теорема (О надграфике выпуклой функции)

Пусть $\mathcal{D}$ – выпуклое множество. $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – выпуклая функция тогда и только тогда, когда множество $\mathbb{G} = \{(x, y) \mid x \in \mathcal{D}, y \in \mathbb{R}, y \geq f(x)\}$ выпукло.

Док-во. Необходимость: для любых точек $(x, y), (u, v) \in \mathbb{G}$ и $0 \leq t \leq 1$ получаем

$$ty + (1 - t)v \geq tf(x) + (1 - t)f(u) = tf(x) + (1 - t)f(u) \geq f(tx + (1 - t)u).$$

Следовательно, $t(x, y) + (1 - t)(u, v) \in \mathbb{G}$, а значит $\mathbb{G}$ выпукло.
Достаточность: для любых точек $x, u \in \mathbb{R}^n$ по определению $(x, f(x)), (u, f(u)) \in \mathbb{G}$. Для $0 \leq t \leq 1$ из выпуклости $\mathbb{G}$ получаем

$$t(x, f(x)) + (1 - t)(u, f(u)) \in \mathbb{G}$$

из чего следует

$$f(tx + (1 - t)u) \leq tf(x) + (1 - t)f(u)$$

Теорема (О выпуклости множества, заданном неравенством)

Если $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – выпуклая функция, $\mathcal{D}$ – выпуклое множество, $c \in \mathbb{R}$, тогда множество $\mathbb{E} = \{x \in \mathcal{D} \mid f(x) \leq c\}$ выпукло.

Док-во. Пусть $x, y \in \mathbb{E}$, тогда для $0 \leq t \leq 1$

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \leq tc + (1-t)c = c,$$

а значит $tx + (1-t)y \in \mathbb{E}$ и, следовательно, $\mathbb{E}$ выпукло.

Опорная функция

Определение

Пусть X – множество со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\mathcal{D} \subset X$.
Опорной функцией *множества $\mathcal{D}$ называется функция*

$$\phi_{\mathcal{D}}(x) := \sup_{y \in \mathcal{D}} \langle x, y \rangle.$$

Представление выпуклых множеств пересечением полупространств

Теорема (О представлении замкнутых выпуклых множеств)

Пусть $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$ – замкнутое выпуклое множество, тогда

$$\mathcal{D} = \cap_{x \in \mathbb{R}^n} \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle \leq \phi_{\mathcal{D}}(x) \}$$

Док-во. Если $x \in \mathcal{D}$, то для любого $z \in \mathbb{R}^n$: $\langle z, x \rangle \leq \sup_{y \in \mathcal{D}} \langle z, y \rangle = \phi_{\mathcal{D}}(z)$, т. е. $x \in \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, y \rangle \leq \phi_{\mathcal{D}}(z) \}$, а значит x принадлежит соответствующему пересечению.

Пусть $x \notin \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ – замкнуто, то существуют $a \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$ (разделяющая гиперплоскость) такие, что

$$\begin{cases} \langle a, y \rangle < c \quad \forall y \in \mathcal{D}, \\ \langle a, x \rangle > c. \end{cases}$$

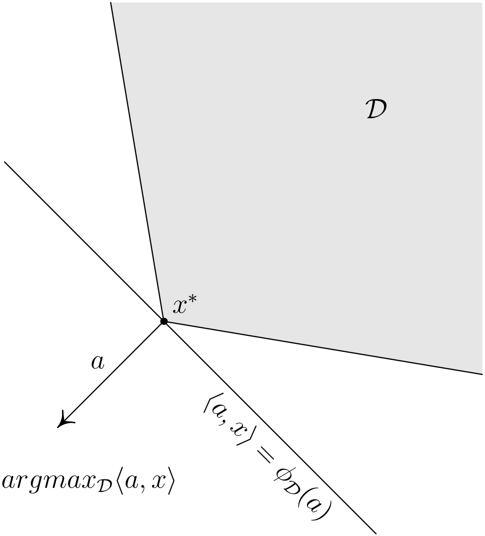
Представление выпуклых множеств пересечением полупространств

Таким образом
$$\phi_{\mathcal{D}}(a) = \sup_{y \in \mathcal{D}} \langle a, y \rangle \leq c,$$
а значит $x \notin \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, a \rangle \leq f(a)\}$ и, следовательно, $\mathcal{D}$ совпадает с указанным пересечением. ■

Замечание 1. В общем случае указанное пересечение задает выпуклую оболочку замыкания множества $\mathcal{D}$.

Замечение 2. Если опорные функции двух замкнутых выпуклых множеств совпадают, то совпадают и сами множества.

Геометрическая интерпретация опорной функции



$$x^* = argmax_{\mathcal{D}}\langle a, x\rangle$$

Неявно заданные функции

Теорема (О неявной функции)

Пусть $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$, f *непрерывно дифференцируема в окрестности* (x^*, y^*), $f(x^*, y^*) = 0_m$, $|\nabla_y f(x^*, y^*)| \neq 0$, *тогда существуют множества* $V_x \in \mathbb{R}^n$, $x^* \in V_x$, $V_y \in \mathbb{R}^m$, $y^* \in V_y$ *и единственная функция* $\varphi : V_x \to V_y$ *такая, что*

$$f(x, \varphi(x)) = 0_m \ \ \forall x \in V_x.$$

Более того, φ *непрерывно дифференцируема на* V_x *и имеет место равенство*

$$\nabla\varphi(x) = -[\nabla_y f(x, y)]^{-1} \nabla_x f(x, y).$$

Неявно заданные функции

Док-во. Индукция по m. Для $m = 1$ имеем $\nabla_y f(x^*, y^*) \neq 0$, не умаляя общности можно считать, что $\nabla_y f(x^*, y^*) > 0$. Из непрерывности $\nabla_y f$ следует, что существует $\epsilon > 0$ такое, что $\nabla_y f(x^*, y) > 0$ при $|y - y^*| \leq \epsilon$. Следовательно $f(x^*, y - \epsilon) < 0 < f(x^*, y + \epsilon)$. Пусть $V_y = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - y^*| \leq \epsilon\}$.

Из непрерывности f и $\nabla_y f$ следует, что существует $\delta > 0$ такое, что $f(x, y - \epsilon) < 0 < f(x, y + \epsilon)$ и $\nabla_y f(x, y) > 0$ при $y \in V_y$, $||x - x^*|| \leq \delta$. Пусть $V_x = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - x^*|| \leq \delta\}$.

Зафиксируем $x \in V_x$. Из непрерывности f и строгой монотонности $f(x, \cdot)$ при следует существование единственной точки $\varphi(x)$ такой, что $f(x, \varphi(x)) = 0$.

Пусть $x, x + h \in V_x$. По формуле Лагранжа

$$\begin{aligned} 0 &= f(x + h, \varphi(x + h)) - f(x, \varphi(x)) \\ &= \nabla_x f(x', \varphi(x)')^T h + \nabla_y f(x', \varphi(x)')^T (\varphi(x + h) - \varphi(x)), \end{aligned}$$

где $(x', \varphi(x)')$ – точка на отрезке с концами $(x, \varphi(x))$, $(x + h, \varphi(x + h))$.

Неявно заданные функции

Так как $V_x \times V_y$ – компакт, а $\nabla_y f$ непрерывна и $\nabla_y f(x,y) > 0,\ x \in V_x, y \in V_y$, то $\exists \alpha > 0 : \quad \nabla_y f(x,y) \geq \alpha$, а значит

$$|\nabla_y f(x', \varphi(x)')| \cdot |\varphi(x') - \varphi(x)| = ||\nabla_x f(x', \varphi(x)')(x' - x)||,$$

$$|\varphi(x') - \varphi(x)| \leq \frac{1}{\alpha} ||\nabla_x f(x', \varphi(x)')(x' - x)|| \xrightarrow{x' \to x} 0,$$

а значит φ непрерывна на V_x. Далее

$$\begin{aligned} 0 &= f(x + th, \varphi(x + th)) - f(x, \varphi(x)) \\ &= t\nabla_x f(x', \varphi(x)')^T h + \nabla_y f(x', \varphi(x)')^T (\varphi(x + th) - \varphi(x)). \end{aligned}$$

Делим на t и устремляем t к нулю

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(x + th) - \varphi(x)}{t} = -\nabla_y f(x, \varphi(x))^{-1} \nabla_x f(x, \varphi(x))^T h.$$

А значит φ непрерывно дифференцируема на V_x.

Неявно заданные функции

Индукционный переход: так как $|\nabla_y f(x^*, y^*)| \neq 0$, то хотя бы для одного индекса i выполняется $\frac{\partial f_i}{\partial y_1} \neq 0$. Не умаляя общности можно считать, что $i = 1$. Из доказанной базы следует, что существует $V_x \in \mathbb{R}^n$, $V_y \subset \mathbb{R}$ и единственная функция $\psi : V_x \to V_y$ такая, что $f_1(x, \psi(x)) = 0$.

Обозначим $g(x, y) = (f_2(x, y), \ldots, f_m(x, y))^T$. Из индукционного предположения следует, что существует $V'_x \in \mathbb{R}^n$, $V'_y \subset \mathbb{R}$ и единственная функция $\gamma : V'_x \to V'_y$ такая, что $g(x, \gamma(x)) = 0$. Таким образом, мы получаем необходимую функцию $\varphi : V_x \cap V'_x \to V_y \times V'_y$, $\varphi(x) = \begin{bmatrix} \psi(x) \\ \gamma(x) \end{bmatrix}$.

Наконец, дифференцируя $f(x, \varphi(x))$ получаем

$$0 = \nabla_x (f(x, \varphi(x))) = \nabla_x f(x, \varphi(x)) + \nabla_y f(x, \varphi(x)) \nabla\varphi(x).$$

$$\nabla\varphi(x) = -[\nabla_y f(x, \varphi(x))]^{-1} \nabla_x f(x, \varphi(x)). \quad \blacksquare$$

Неявно заданные функции

Замечание. Если выполняются условия теоремы, то для любого вектора $0_{n+m} \neq (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$, $\nabla f(x^*, y^*) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0_m$ существует кривая $\psi : [-a, a] \to \mathbb{R}^{n+m}$, $a > 0$ такая, что

$$\begin{cases} f(\psi(t)) = 0_m, \\ \psi(0) = \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}, \\ \frac{d}{dt}\psi(0) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \end{cases}$$

Док-во. Пусть $h \in \mathbb{R}^n$, рассмотрим

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} x^* + th \\ \varphi(x^* + th) \end{bmatrix}$$

Непосредственной подстановкой получаем $f(\psi(t)) = f(x^* + th, \varphi(x^* + th)) = 0_m$. Дифференцируя $\psi(t)$ получаем

$$\nabla \psi_x(t) = h,$$

$$\nabla \psi_y(t) = \nabla \varphi(x^* + th)h = -[\nabla_y f(x^* + th, \varphi(x^* + th))]^{-1} \nabla_x f(x^* + th, \varphi(x^* + th))h.$$

Неявно заданные функции

Следовательно нужно взять $h = x$. С другой стороны в силу $\nabla f(x^*, y^*) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0_m$ получаем

$$y = -[\nabla_y f(x^*, y^*)]^{-1} \nabla_x f(x^*, y^*) x,$$

что совпадает с $\nabla \psi_y(0)$.
С другой стороны, если такая кривая существует, то дифференцируя по t равенство $f(\psi(t)) = 0_m$ получаем

$$0_m = \frac{d}{dt} f(\psi(t)) \Big|_{t=0} = \nabla f(\psi(0)) \nabla \psi(0) = \nabla f(x^*, y^*) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$