Задание 12 (на 30.11, в письменном виде).

а)

$\boxed{\textbf{ML 59.}}$ Пусть сигнатура содержит только одноместные предикатные символы. Покажите, что:

а) всякая выполнимая формула, содержащая n предикатных символов, выполнима и в интерпретации, в носителе которой не более 2^n элементов;

б) существует алгоритм, проверяющий выполнимость таких формул.

$\boxed{\textbf{ML 60.}}$ Покажите, что:

а) если формула $A(x)$ выводима, то выводима и формула $\forall x A(x)$;

б) множество выводимых формул не изменится, если мы добавим правило обобщения $\frac{A(x)}{\forall x A(x)}$, а правила Бернайса заменим на две новые аксиомы: $(\forall x(A \to B)) \to (A \to \forall x B)$ и $(\exists x(B \to A)) \to (\exists x B \to A)$, в этих аксиомах x не входит в A свободно.

$\boxed{\textbf{ML 61.}}$ Покажите, что:

а) если $A \to B$ выводима, то и $\exists x A \to \exists x B$ выводима;

б) формула $\forall x A(x) \to \forall y A(y)$ выводима.

$\boxed{\textbf{ML 62.}}$ Приведите пример формулы, которая истинна во всех интерпретациях с конечным носителем, но не является общезначимой.

Пусть I — интерпретация. Теорией $Th(I)$ называется множество замкнутых формул, которые истины в интерпретации I.

$\boxed{\textbf{ML 63.}}$ Постройте две неизоморфные интерпретации теории $Th(\mathbb{Q}, <, =)$ (плотный линейный порядок без первого и последнего элемента) мощности континуум.

$\boxed{\textbf{ML 51.}}$ Будет ли интерпретация $(\mathbb{N}, =, <)$ элементарно эквивалентна: $(\mathbb{N}+\mathbb{Z}, =, <)$. А будут ли эти интерпретации изоморфны?

$\boxed{\textbf{ML 53.}}$

а) Покажите, что естественные интерпретации $(=, +, *, 0, 1)$ для всех алгебраически замкнутых полей характеристики 0 являются элементарно эквивалентными.

б) Для двух алгебраически замкнутых полей k_1 и k_2 характеристики 0 выполняется, что k_1 является надполем поля k_2. Покажите, что естественная интерпретация $(=, +, *, 0, 1)$ в поле k_1 является элементарным расширением естественной интерпретации $(=, +, *, 0, 1)$ в поле k_2.

в) Докажите теорему Гильберта о нулях: всякая система полиномиальных уравнений с коэффициентами в алгебраически замкнутом поле характеристики ноль, имеющее решение в расширении поля, имеет решение и в самом поле.

г) Докажите переформулировку теоремы Гильберта о нулях: если система полиномиальных уравнений $\bigwedge\limits_{i=1}^{k} P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ не имеет решения в некотором алгебраически замкнутом поле характеристики 0, то найдутся такие многочлены $Q_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, Q_k(x_1, \ldots, x_n)$, что $\sum\limits_i Q_i P_1 = 1$.

$\boxed{\textbf{ML 58.}}$ Заменим 11-ую аксиому $A \lor \neg A$ на $\neg\neg A \to A$. Покажите, что множество выводимых формул не изменится.