Практика 10.11.2017

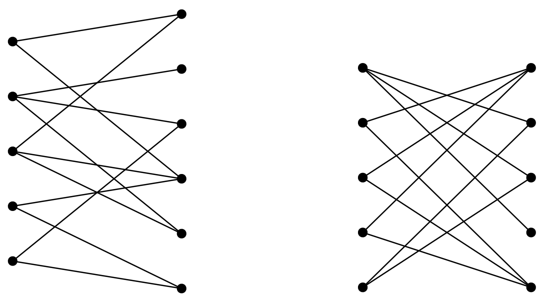
1.1 (0,5 балла). Выразить количество $\alpha'(T)$ ребер в максимальном паросочетании для дерева T через количество его вершин n и количество k элементов в максимальном вершинно независимом множестве.

(a) (b)

Рис. 1

1.2 (1 балл). Найти максимальные паросочетания в приведенных на рис.1 графах. Доказать, что данные паросочетания максимальны.

1.3 (0,5 балла). Найти количество X-насыщенных паросочетаний в полном двудольном графе $K_{n,m}$ с долями X и Y, $|X| = n$, $|Y| = m$, $n \leqslant m$.



(a) (b)

Рис. 2

1.4 (1 балл). Какие из графов, изображенных на рис.2, имеют X-насыщенное паросочетание?

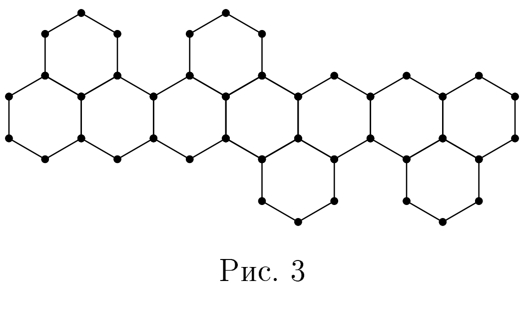


Рис. 3

1.5 (1,5 балла). Используя свойство слабой оптимальности, доказать, что в изображенном на рис.3 графе G совершенное паросочетание отсутствует.

1.6 (1 балл). Доказать, что в непустом k-регулярном двудольном графе всегда существует совершенное паросочетание.

1.7 (1 балл). В группе имеются шесть студентов. Известно, что первый и третий студенты вместе работают над научным проектом, второй и четвертый вместе посещают спецкурс, первый, второй и пятый вместе занимаются спортом, третий и пятый вместе ходят на занятия по английскому языку, и, наконец, пятый и шестой студенты вместе играют в компьютерные игры. Оказалось, что в один из дней все эти дела нужно провести одновременно. Можно ли так распределить студентов по занятиям, чтобы каждое из этих дел не сорвалось?

1.8 (1,5 балла). Пусть в двудольном графе $G[X, Y]$ степень любой вершины $x \in X$ больше или равна степени любой вершины $y \in Y$. Доказать, что в $G[X, Y]$ существует X-насыщенное паросочетание.

1.9 (1,5 балла). Матрицей P перестановок называется квадратная бинарная матрица, в которой ровно одна единица стоит в каждой строке и в каждом столбце. Любая такая матрица является, по сути, матричным представлением некоторой перестановки σ. Доказать, что любая квадратная матрица $n \times n$, состоящая из неотрицательных целых чисел, выражается в виде суммы k матриц перестановок тогда и только тогда, когда сумма чисел в любой строке, а также сумма чисел в любом столбце равны k.

1.10 (1,5 балла). Дважды стохастической матрицей Q называется вещественная неотрицательная матрица, в которой сумма чисел в любой строке и сумма чисел в любой строке равняется единице. Доказать, что любая такая матрица Q представима в виде линейной комбинации

$$Q = c_1 \cdot P_1 + \ldots + c_m \cdot P_m,$$

где P_i — матрицы перестановок, c_i — вещественные неотрицательные числа, сумма которых равна единице.

1.11 (1 балл). Доказать теорему Холла, используя вершинную теорему Менгера.

1.12 (1,5 балла). Доказать, что если $|N(S)| > |S|$ для любого $\varnothing \neq S \subset X$ в двудольном графе $G[X, Y]$, то любое ребро принадлежит хотя бы одному X-насыщенному паросочетанию M.

1.13 (1,5 балла). Имеется колода из $n \cdot m$ карт, по одной карте для каждого значения масти из $[m]$ и для каждого значения достоинства из $[n]$. Мы раскладываем эти карты в m рядов, каждый из которых содержит ровно n карт. Доказать, что при любой раскладке этих карт можно всегда найти m карт разных мастей, никакие две из которых не лежат в одном и том же столбце.

1.14 (2 балла). Пусть в двудольном графе $G[X, Y]$ существует X-насыщенное паросочетание. Доказать, что количество рёбер в $G[X, Y]$, которые не принадлежат ни одному X-насыщенному паросочетанию, не превосходит $\binom{|X|}{2}$. Показать, что эта оценка достигается при любом значении $|X|$.

1.15 (1,5 балла). Предположим, что размер максимального паросочетания в простом двудольном графе G меньше заданного числа k. Известно также, что в таком графе отсутствует звезда, построенная на l ребрах. Получить верхнюю оценку на количество $|E(G)|$ ребер в этом графе через числа k и l.