Задача 1, простая

$$
\begin{aligned}
\text{найти экстремум } & 5x^2 + 4xy + y^2 \\
\text{при условии } & x + y = 1 \\
& x, y \geq 0
\end{aligned}
$$

Подстановкой $y = 1 - x$ получаем

$$5x^2 + 4xy + y^2 = 5x^2 + 4x(1-x) + (1-x)^2 = 2x^2 + 2x + 1$$

и

$$x, y \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x, 1 - x \geq 0 \;\Leftrightarrow\; 0 \leq x \leq 1$$

Вершина параболы: $-1/2 < 0$, значит минимум и максимум достигаются на концах: 1 при $x = 0$ и 5 при $x = 1$.

Задача 2, многочлен Чебышева

$$\max_{t \in [-1,1]} |t^2 + x_1 t + x_2| \to \min$$

Для начала сделаем замену с целью выделения полного квадрата $\alpha = -x_1/2, \beta = x_2 - x_1^2/4$, тогда

$$t^2 + x_1 t + x_2 = (t - \alpha)^2 + \beta.$$

Решение 1.

$$\max_{t \in [-1,1]} |f(t)| = \max \left\{ \max_{t \in [-1,1]} f(t), - \min_{t \in [-1,1]} f(t) \right\}.$$

У рассматриваемой параболы старший коэффициент положителен, значит максимум достигается на одном из концов отрезка, а минимум на одном из концов отрезка в случае $\alpha \notin [-1, 1]$ и в вершине $t = \alpha$ при $\alpha \in [-1, 1]$.

Пусть $\underline{\alpha \notin [-1, 1]}$, положим $\alpha > 1$, случай $\alpha < 1$ идентичен.

$$
\begin{aligned}
\max_{t \in [-1,1]} (t - \alpha)^2 + \beta &= (-1 - \alpha)^2 + \beta \\
\min_{t \in [-1,1]} (t - \alpha)^2 + \beta &= (1 - \alpha)^2 + \beta
\end{aligned}
$$

$$\max_{t \in [-1,1]} |(t - \alpha)^2 + \beta| = \max\{(1 + \alpha)^2 + \beta, -(1 - \alpha)^2 - \beta\}$$

При фиксированном α минимум этого максимума достигается для такого β, что обе величины равны по модулю (док-во в конце), т. е.

$$\beta = -\frac{1}{2}((1+\alpha)^2 + (1-\alpha)^2)$$

$$\min_{\beta} \max\{(1+\alpha)^2 + \beta, -(1-\alpha)^2 - \beta\} = \frac{1}{2}((1+\alpha)^2 - (1-\alpha)^2) = 2\alpha$$

что не лучше, чем при $\alpha = 1$.

Пусть $\underline{\alpha \in [-1,1]}$.

Минимум достигается при $t = \alpha$ и равен β, а значит выбор α влияет только на максимум, который достигается в вершинах, т. е.

$$\max_{t\in[-1,1]} (t-\alpha)^2 + \beta = \max\{(\alpha-1)^2 + \beta, (\alpha+1)^2 + \beta\}$$

Заметим, что при $\alpha > 0$ $(\alpha+1)^2 > 1$, а при $\alpha < 0$ $(\alpha-1)^2 > 1$, при $\alpha = 0$ $1 = (\alpha+1)^2 = (\alpha-1)^2$, таким образом в оптимальном решении $\alpha = 0$. Наконец подбираем β так, чтобы минимизировать

$$\max\{-\beta, 1+\beta\}$$

отсюда $\beta = -\frac{1}{2}$. В исходных переменных $x_1 = 0, x_2 = -\frac{1}{2}$.

Замечание. Если $b > a$, то величина $\max\{x-a, b-x\}$ достигает минимума при $x = \frac{a+b}{2}$ и равна $\frac{b-a}{2}$ так как при $x = \frac{a+b}{2}$ имеет место равенство $x - a = b - x$, $x - a$ положительно и возрастает, а $b - x$ отрицательно и убывает.

Решение 2.

$$\max_{t\in[-1,1]} |(t-\alpha)^2 + \beta| = \max_{t\in[-1+\alpha,1+\alpha]} |t^2 + beta|$$

Заметим, что если функиця $f : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$ имеет минимум m на $\mathcal{D}$ и максимум M, то

$$\min_{\beta} \max_{t\in\mathcal{D}} |f(t) + \beta| = \min_{\beta} \max\{M + \beta, -m - \beta\},$$

минимум достигается при $\beta = -\frac{M+m}{2}$ и равен $\frac{M-m}{2}$. Таким образом

$$\min_{\alpha,\beta} \max_{t\in[-1,1]} |(t-\alpha)^2 + \beta| = \min_{\alpha} \left(\frac{\min_{t\in[-1+\alpha,1+\alpha]} t^2 + \max_{t\in[-1+\alpha,1+\alpha]} t^2}{2} \right).$$

Таким образом для $f(t) = t^2$ нужно найти такой отрезок длины 2 с наименьшей разницей между минимальным и максимальным значением f на этом отрезке. Остается небольшой разбор случаев:

$\alpha \geq 1$	$\min_{t\in[-1+\alpha,1+\alpha]} t^2 = (\alpha-1)^2$, $\max_{t\in[-1+\alpha,1+\alpha]} t^2 = (\alpha+1)^2$, разница: 4α, меньше всего при $\alpha = 1$.
$\alpha \leq -1$	$\min_{t\in[-1+\alpha,1+\alpha]} t^2 = (\alpha+1)^2$, $\max_{t\in[-1+\alpha,1+\alpha]} t^2 = (\alpha-1)^2$, разница: -4α, меньше всего при $\alpha = 1$.
$0 \leq \alpha \leq 1$	$\min_{t\in[-1+\alpha,1+\alpha]} t^2 = 0$, $\max_{t\in[-1+\alpha,1+\alpha]} t^2 = (\alpha+1)^2$, разница: $(\alpha+1)^2$, меньше всего при $\alpha = 0$.
$-1 \leq \alpha \leq 0$	$\min_{t\in[-1+\alpha,1+\alpha]} t^2 = 0$, $\max_{t\in[-1+\alpha,1+\alpha]} t^2 = (\alpha-1)^2$, разница: $(\alpha-1)^2$, меньше всего при $\alpha = 0$.

Итого $\alpha = 0$, $\beta = -1/2$.

Задача 3, техническая

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \to \min$$

Решение через вспомогательные задачи.

Если x^*, y^* – решение задачи, то x^*, y^* также является решением следующей задачи

$$\begin{aligned} \text{минимизировать } & x^2 + y^2 + 2c \\ \text{при условии } & (x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2 \end{aligned}$$

при некотором $c \geq 0$. Если $c = 0$ единственная допустимая точка – (a,b), $f(a,b) = a^2+b^2$. Если $c > 0$, то можно применить метод множителей Лагранжа

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + 2c + \lambda((x-a)^2 + (y-b)^2 - c^2)$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2x + 2\lambda(x-a) \\ 0 &= 2y + 2\lambda(y-b) \end{aligned}$$

Умножаем первое неравенство на y, второе на y и вычитаем одно из другого

$$\lambda(bx - ay) = 0$$

если $\lambda = 0$, то $x = y = 0$, иначе

$$ay = bx$$

Параметризуем

$$\begin{cases} x = at \\ y = bt \end{cases}$$

и вернемся к f:

$$f(x,y) = (a^2+b^2)t^2 + 2\sqrt{a^2(t-1)^2 + b^2(t-1)^2} = \sqrt{a^2+b^2}(\sqrt{a^2+b^2}t^2 + 2|t-1|).$$

Функция $g(t) = \gamma t^2 + 2|t-1|$ выпукла при $\gamma > 0$ и дифференцируема во всех точках кроме 1, при этом $g(t) \xrightarrow{t\to\infty} +\infty$, значит g иммет минимум. Наконец

$$g'(t) = \begin{cases} 2\gamma t + 2, & t > 1 \\ 2\gamma t - 2, & t < 1. \end{cases}$$

Учитывая $\gamma > 0$, при $t > 1$ $2\gamma t + 2 > 0$, $2\gamma t - 2 = 0$ при $t = 1/\gamma < 1$. Таким образом на минимум два кандидата: $t = 1, g(1) = \gamma$ и $t = 1/\gamma$ при $\gamma > 1$, $g(1/\gamma) = 1/\gamma - 2(1\gamma - 1) = 2 - 1/\gamma = -\frac{(\gamma-1)^2}{\gamma} + \gamma < g(1)$. Таким образом

$$\operatorname*{argmin}_t g(t) = \begin{cases} 1/\gamma, & \gamma > 1 \\ 1, & \gamma \le 1. \end{cases}$$

что дает для для исходной функции

$$\operatorname*{argmin}_{x,y} f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), & a^2 + b^2 > 1 \\ (a,b), & a^2 + b^2 \le 1. \end{cases}$$

Решение непосредственным дифференцированием.

f дифференцируема во всех точках кроме (a,b). При дифференцировании получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2\frac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0,$$

переносим корни в правую часть

$$x = -\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}$$
$$y = -\frac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}, \tag{1}$$

возводим в квадрат и складываем

$$x^2 + y^2 = 1.$$

С другой стороны, если в (1) умножить первое равнство на $y - b$, а второе на $x - a$, то правые части окажутся равными, таким образом

$$x(y-b) = y(x-a)$$

что эквивалентно

$$ay = bx$$

Таким образом есть 3 кандидата на точку минимума

$$(a, b), \quad \left(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Непосредственной подстановкой получаем для первой точки $f(a, b) = a^2 + b^2$, для второй и третей

$$f\left(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = 1 + 2|\sqrt{a^2+b^2} \mp 1|.$$

Очевидным образом значение в третьей точке (со знаком минус) всегда больше, чем во второй. Наконец $a^2 + b^2 > 1 + 2|\sqrt{a^2+b^2} - 1| \Leftrightarrow a^2 + b^2 > 1$.

Задача 4, теоретическая

Выпуклой оболочкой множества $M \subset \mathbb{R}^n$ называется множество $\{tx + (1-t)y \mid x, y \in M, 0 \le t \le 1\}$. Показать, что опорная функция множества совпадает с опорной функцией её выпуклой оболочки.

Замечание. Дано определение объекта, не являющегося выпуклой оболочкой в общепринятом смысле этого термина. Вообще говоря, заданный объект даже не обязан быть выпуклым множеством.

Опорная функция $\varphi_{\mathcal{D}}$ множества $\mathcal{D}$ определяеся как

$$\varphi_{\mathcal{D}}(x) = \sup_{y \in \mathcal{D}} \langle x, y \rangle$$

Обозначим $S = \{tx + (1-t)y \mid x, y \in M, 0 \le t \le 1\}$ из включения $M \subset S$

$$\varphi_M(x) = \sup_{y \in M} \langle x, y \rangle \le \sup_{y \in S} \langle x, y \rangle = \varphi_S(x)$$

С другой стороны, $\forall z \in S$, то $\exists a(z), b(z) \in M$, $t(z) \in [0, 1]$: $z = t(z)a(z) + (1 - t(z))b(z)$. Таким образом

$$\begin{aligned}
\varphi_S(x) = \sup_{z \in S} \langle x, z \rangle &= \sup_{z \in S} \langle x, t(z)a(z) + (1-t(z))b(z) \rangle \\
&\le \sup_{t \in [0,1], a, b \in M} \langle x, ta + (1-t)b \rangle = \sup_{t \in [0,1]} \sup_{a, b \in M} (t\langle x, a \rangle + (1-t)\langle x, b \rangle) \\
&= \sup_{t \in [0,1]} (t \sup_{a \in M} \langle x, a \rangle + (1-t) \sup_{b \in M} \langle x, b \rangle) \\
&= \max\{\sup_{a \in M} \langle x, a \rangle, \sup_{b \in M} \langle x, b \rangle\} = \sup_{y \in M} \langle x, y \rangle = \varphi_M(x)
\end{aligned}$$