

## Задача 1, простая

$$\begin{aligned} &\text{найти экстремум } 5x^2 + 4xy + y^2 \\ &\text{при условии } x + y = 1 \\ &x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Подстановкой  $y = 1 - x$  получаем

$$5x^2 + 4xy + y^2 = 5x^2 + 4x(1 - x) + (1 - x)^2 = 2x^2 + 2x + 1$$

и

$$x, y \geq 0 \Leftrightarrow x, 1 - x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$$

Вершина параболы:  $-1/2 < 0$ , значит минимум и максимум достигаются на концах: 1 при  $x = 0$  и 5 при  $x = 1$ .

## Задача 2, многочлен Чебышева

$$\max_{t \in [-1, 1]} |t^2 + x_1 t + x_2| \rightarrow \min$$

Для начала сделаем замену с целью выделения полного квадрата  $\alpha = -x_1/2, \beta = x_2 - x_1^2/4$ , тогда

$$t^2 + x_1 t + x_2 = (t - \alpha)^2 + \beta.$$

Далее

$$\max_{t \in [-1, 1]} |f(t)| = \max \left\{ \max_{t \in [-1, 1]} f(t), -\min_{t \in [-1, 1]} f(t) \right\}.$$

У рассматриваемой параболы старший коэффициент положителен, значит максимум достигается на одном из концов отрезка, а минимум на одном из концов отрезка в случае  $\alpha \notin [-1, 1]$  и в вершине  $t = \alpha$  при  $\alpha \in [-1, 1]$ .

Пусть  $\alpha \notin [-1, 1]$ , положим  $\alpha > 1$ , случай  $\alpha < -1$  идентичен.

$$\begin{aligned} \max_{t \in [-1, 1]} (t - \alpha)^2 + \beta &= (-1 - \alpha)^2 + \beta \\ \min_{t \in [-1, 1]} (t - \alpha)^2 + \beta &= (1 - \alpha)^2 + \beta \end{aligned}$$

$$\max_{t \in [-1, 1]} |(t - \alpha)^2 + \beta| = \max\{(1 + \alpha)^2 + \beta, -(1 - \alpha)^2 - \beta\}$$

При фиксированном  $\alpha$  минимум этого максимума достигается для такого  $\beta$ , что обе величины равны по модулю (док-во в конце), т. е.

$$\beta = -\frac{1}{2}((1 + \alpha)^2 + (1 - \alpha)^2)$$

$$\min_{\beta} \max\{(1 + \alpha)^2 + \beta, -(1 - \alpha)^2 - \beta\} = \frac{1}{2}((1 + \alpha)^2 - (1 - \alpha)^2) = 2\alpha$$

что не лучше, чем при  $\alpha = 1$ .

Пусть  $\alpha \in [-1, 1]$ .

Минимум достигается при  $t = \alpha$  и равен  $\beta$ , а значит выбор  $\alpha$  влияет только на максимум, который достигается в вершинах, т. е.

$$\max_{t \in [-1, 1]} (t - \alpha)^2 + \beta = \max\{(\alpha - 1)^2 + \beta, (\alpha + 1)^2 + \beta\}$$

Заметим, что при  $\alpha > 0$   $(\alpha + 1)^2 > 1$ , а при  $\alpha < 0$   $(\alpha - 1)^2 > 1$ , при  $\alpha = 0$   $1 = (\alpha + 1)^2 = (\alpha - 1)^2$ , таким образом в оптимальном решении  $\alpha = 0$ . Наконец подбираем  $\beta$  так, чтобы минимизировать

$$\max\{-\beta, 1 + \beta\}$$

отсюда  $\beta = -\frac{1}{2}$ . В исходных переменных  $x_1 = 0, x_2 = -\frac{1}{2}$ .

*Замечание.* Если  $b > a$ , то величина  $\max\{x - a, b - x\}$  достигает минимума при  $x = \frac{a+b}{2}$  и равна  $\frac{b-a}{2}$  так как при  $x = \frac{a+b}{2}$  имеет место равенство  $x - a = b - x$ ,  $x - a$  положительно и возрастает, а  $b - x$  отрицательно и убывает.

### Задача 3, техническая

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \rightarrow \min$$

Для начала стоит отметить что  $f(x, y)$  дифференцируема везде кроме точки  $(a, b)$ . Последующие выводы можно получить непосредственным дифференцированием. Если  $x^*, y^*$  – решение задачи, то  $x^*, y^*$  также является решением следующей задачи

$$\begin{aligned} &\text{минимизировать } x^2 + y^2 + 2c \\ &\text{при условии } (x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2 \end{aligned}$$

при некотором  $c \geq 0$ . Если  $c = 0$  единственная допустимая точка –  $(a, b)$ ,  $f(a, b) = a^2 + b^2$ . Если  $c > 0$ , то можно применить метод множителей Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + 2c + \lambda((x - a)^2 + (y - b)^2 - c^2)$$

$$0 = 2x + 2\lambda(x - a)$$

$$0 = 2y + 2\lambda(y - b)$$

Умножаем первое неравенство на  $y$ , второе на  $x$  и вычитаем одно из другого

$$\lambda(bx - ay) = 0$$

если  $\lambda = 0$ , то  $x = y = 0$ , иначе

$$ay = bx$$

Параметризуем

$$\begin{cases} x = at \\ y = bt \end{cases}$$

и вернемся к  $f$ :

$$f(x, y) = (a^2 + b^2)t^2 + 2\sqrt{a^2(t-1)^2 + b^2(t-1)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}(\sqrt{a^2 + b^2}t^2 + 2|t-1|).$$

Функция  $g(t) = \gamma t^2 + 2|t-1|$  выпукла при  $\gamma > 0$  и дифференцируема во всех точках кроме 1, при этом  $g(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty$ , значит  $g$  имеет минимум. Наконец

$$g'(t) = \begin{cases} 2\gamma t + 2, & t > 1 \\ 2\gamma t - 2, & t < 1. \end{cases}$$

Учитывая  $\gamma > 0$ , при  $t > 1$   $2\gamma t + 2 > 0$ ,  $2\gamma t - 2 = 0$  при  $t = 1/\gamma < 1$ . Таким образом на минимум два кандидата:  $t = 1, g(1) = \gamma$  и  $t = 1/\gamma$  при  $\gamma > 1$ ,  $g(1/\gamma) = 1/\gamma - 2(1\gamma - 1) = 2 - 1/\gamma = -\frac{(\gamma-1)^2}{\gamma} + \gamma < g(1)$ . Таким образом

$$\operatorname{argmin}_t g(t) = \begin{cases} 1/\gamma, & \gamma > 1 \\ 1, & \gamma \leq 1. \end{cases}$$

что дает для для исходной функции

$$\operatorname{argmin}_{x,y} f(x, y) = \begin{cases} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right), & a^2 + b^2 > 1 \\ (a, b), & a^2 + b^2 \leq 1. \end{cases}$$

## Задача 4, теоретическая

Выпуклой оболочкой множества  $M \subset \mathbb{R}^n$  называется множество  $\{tx + (1-t)y \mid x, y \in M, 0 \leq t \leq 1\}$ . Показать, что опорная функция множества совпадает с опорной функцией её выпуклой оболочки.

*Замечание.* Дано определение объекта, не являющегося выпуклой оболочкой в общепринятом смысле этого термина. Вообще говоря, заданный объект даже не обязан быть выпуклым множеством.

Опорная функция  $\varphi_{\mathcal{D}}$  множества  $\mathcal{D}$  определяется как

$$\varphi_{\mathcal{D}}(x) = \sup_{y \in \mathcal{D}} \langle x, y \rangle$$

Обозначим  $S = \{tx + (1-t)y \mid x, y \in M, 0 \leq t \leq 1\}$  из включения  $M \subset S$

$$\varphi_M(x) = \sup_{y \in M} \langle x, y \rangle \leq \sup_{y \in S} \langle x, y \rangle = \varphi_S(x)$$

С другой стороны,  $\forall z \in S$ , то  $\exists a(z), b(z) \in M, t(z) \in [0, 1]: z = t(z)a(z) + (1-t(z))b(z)$ . Таким образом

$$\begin{aligned} \varphi_S(x) &= \sup_{z \in S} \langle x, z \rangle = \sup_{z \in S} \langle x, t(z)a(z) + (1-t(z))b(z) \rangle \\ &\leq \sup_{t \in [0, 1], a, b \in M} \langle x, ta + (1-t)b \rangle = \sup_{t \in [0, 1]} \sup_{a, b \in M} (t\langle x, a \rangle + (1-t)\langle x, b \rangle) \\ &= \sup_{t \in [0, 1]} (t \sup_{a \in M} \langle x, a \rangle + (1-t) \sup_{b \in M} \langle x, b \rangle) \\ &= \max\{ \sup_{a \in M} \langle x, a \rangle, \sup_{b \in M} \langle x, b \rangle \} = \sup_{y \in M} \langle x, y \rangle = \varphi_M(x) \end{aligned}$$