

Задача 1, простая

$$\begin{aligned} &\text{найти экстремум } 5x^2 + 4xy + y^2 \\ &\text{при условии } x + y = 1 \\ &x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Подстановкой $y = 1 - x$ получаем

$$5x^2 + 4xy + y^2 = 5x^2 + 4x(1 - x) + (1 - x)^2 = 2x^2 + 2x + 1$$

и

$$x, y \geq 0 \Leftrightarrow x, 1 - x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$$

Вершина параболы: $-1/2 < 0$, значит минимум и максимум достигаются на концах: 1 при $x = 0$ и 5 при $x = 1$.

Задача 2, многочлен Чебышева

$$\max_{t \in [-1, 1]} |t^2 + x_1 t + x_2| \rightarrow \min$$

Для начала сделаем замену с целью выделения полного квадрата $\alpha = -x_1/2, \beta = x_2 - x_1^2/4$, тогда

$$t^2 + x_1 t + x_2 = (t - \alpha)^2 + \beta.$$

Далее

$$\max_{t \in [-1, 1]} |f(t)| = \max \left\{ \max_{t \in [-1, 1]} f(t), -\min_{t \in [-1, 1]} f(t) \right\}.$$

У рассматриваемой параболы старший коэффициент положителен, значит максимум достигается на одном из концов отрезка, а минимум на одном из концов отрезка в случае $\alpha \notin [-1, 1]$ и в вершине $t = \alpha$ при $\alpha \in [-1, 1]$.

Пусть $\alpha \notin [-1, 1]$, положим $\alpha > 1$, случай $\alpha < -1$ идентичен.

$$\begin{aligned} \max_{t \in [-1, 1]} (t - \alpha)^2 + \beta &= (-1 - \alpha)^2 + \beta \\ \min_{t \in [-1, 1]} (t - \alpha)^2 + \beta &= (1 - \alpha)^2 + \beta \end{aligned}$$

$$\max_{t \in [-1, 1]} |(t - \alpha)^2 + \beta| = \max\{(1 + \alpha)^2 + \beta, -(1 - \alpha)^2 - \beta\}$$

При фиксированном α минимум этого максимума достигается для такого β , что обе величины равны по модулю (док-во в конце), т. е.

$$\beta = -\frac{1}{2}((1 + \alpha)^2 + (1 - \alpha)^2)$$

$$\min_{\beta} \max\{(1 + \alpha)^2 + \beta, -(1 - \alpha)^2 - \beta\} = \frac{1}{2}((1 + \alpha)^2 - (1 - \alpha)^2) = 2\alpha$$

что не лучше, чем при $\alpha = 1$.

Пусть $\alpha \in [-1, 1]$.

Минимум достигается при $t = \alpha$ и равен β , а значит выбор α влияет только на максимум, который достигается в вершинах, т. е.

$$\max_{t \in [-1, 1]} (t - \alpha)^2 + \beta = \max\{(\alpha - 1)^2 + \beta, (\alpha + 1)^2 + \beta\}$$

Заметим, что при $\alpha > 0$ $(\alpha + 1)^2 > 1$, а при $\alpha < 0$ $(\alpha - 1)^2 > 1$, при $\alpha = 0$ $1 = (\alpha + 1)^2 = (\alpha - 1)^2$, таким образом в оптимальном решении $\alpha = 0$. Наконец подбираем β так, чтобы минимизировать

$$\max\{-\beta, 1 + \beta\}$$

отсюда $\beta = -\frac{1}{2}$. В исходных переменных $x_1 = 0, x_2 = -\frac{1}{2}$.

Замечание. Если $b > a$, то величина $\max\{x - a, b - x\}$ достигает минимума при $x = \frac{a+b}{2}$ и равна $\frac{b-a}{2}$ так как при $x = \frac{a+b}{2}$ имеет место равенство $x - a = b - x$, $x - a$ положительно и возрастает, а $b - x$ отрицательно и убывает.

Задача 3, техническая

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \rightarrow \min$$

Для начала стоит отметить что $f(x, y)$ дифференцируема везде кроме точки (a, b) . Последующие выводы можно получить непосредственным дифференцированием. Если x^*, y^* – решение задачи, то x^*, y^* также является решением следующей задачи

$$\begin{aligned} &\text{минимизировать } x^2 + y^2 + 2c \\ &\text{при условии } (x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2 \end{aligned}$$

при некотором $c \geq 0$. Если $c = 0$ единственная допустимая точка – (a, b) , $f(a, b) = a^2 + b^2$. Если $c > 0$, то можно применить метод множителей Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + 2c + \lambda((x - a)^2 + (y - b)^2 - c^2)$$

$$0 = 2x + 2\lambda(x - a)$$

$$0 = 2y + 2\lambda(y - b)$$

Умножаем первое неравенство на y , второе на x и вычитаем одно из другого

$$\lambda(bx - ay) = 0$$

если $\lambda = 0$, то $x = y = 0$, иначе

$$ay = bx$$

Параметризуем

$$\begin{cases} x = at \\ y = bt \end{cases}$$

и вернемся к f :

$$f(x, y) = (a^2 + b^2)t^2 + 2\sqrt{a^2(t-1)^2 + b^2(t-1)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}(\sqrt{a^2 + b^2}t^2 + 2|t-1|).$$

Функция $g(t) = \gamma t^2 + 2|t-1|$ выпукла при $\gamma > 0$ и дифференцируема во всех точках кроме 1, при этом $g(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty$, значит g имеет минимум. Наконец

$$g'(t) = \begin{cases} 2\gamma t + 2, & t > 1 \\ 2\gamma t - 2, & t < 1. \end{cases}$$

Учитывая $\gamma > 0$, при $t > 1$ $2\gamma t + 2 > 0$, $2\gamma t - 2 = 0$ при $t = 1/\gamma < 1$. Таким образом на минимум два кандидата: $t = 1, g(1) = \gamma$ и $t = 1/\gamma$ при $\gamma > 1$, $g(1/\gamma) = 1/\gamma - 2(1\gamma - 1) = 2 - 1/\gamma = -\frac{(\gamma-1)^2}{\gamma} + \gamma < g(1)$. Таким образом

$$\operatorname{argmin}_t g(t) = \begin{cases} 1/\gamma, & \gamma > 1 \\ 1, & \gamma \leq 1. \end{cases}$$

что дает для для исходной функции

$$\operatorname{argmin}_{x,y} f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right), & a^2 + b^2 > 1 \\ (a, b), & a^2 + b^2 \leq 1. \end{cases}$$

Задача 4, теоретическая

Выпуклой оболочкой множества $M \subset \mathbb{R}^n$ называется множество $\{tx + (1-t)y \mid x, y \in M, 0 \leq t \leq 1\}$. Показать, что опорная функция множества совпадает с опорной функцией её выпуклой оболочки.

Замечание. Дано определение объекта, не являющегося выпуклой оболочкой в общем смысле этого термина. Вообще говоря, заданный объект даже не обязан быть выпуклым множеством.

Опорная функция $\varphi_{\mathcal{D}}$ множества \mathcal{D} определяется как

$$\varphi_{\mathcal{D}}(x) = \sup_{y \in \mathcal{D}} \langle x, y \rangle$$

Обозначим $S = \{tx + (1-t)y \mid x, y \in M, 0 \leq t \leq 1\}$ из включения $M \subset S$

$$\varphi_M(x) = \sup_{y \in M} \langle x, y \rangle \leq \sup_{y \in S} \langle x, y \rangle = \varphi_S(x)$$

С другой стороны, $\forall z \in S$, то $\exists a(z), b(z) \in M, t(z) \in [0, 1]: z = t(z)a(z) + (1-t(z))b(z)$. Таким образом

$$\begin{aligned} \varphi_S(x) &= \sup_{z \in S} \langle x, z \rangle = \sup_{z \in S} \langle x, t(z)a(z) + (1-t(z))b(z) \rangle \\ &\leq \sup_{t \in [0, 1], a, b \in M} \langle x, ta + (1-t)b \rangle = \sup_{t \in [0, 1]} \sup_{a, b \in M} (t\langle x, a \rangle + (1-t)\langle x, b \rangle) \\ &= \sup_{t \in [0, 1]} (t \sup_{a \in M} \langle x, a \rangle + (1-t) \sup_{b \in M} \langle x, b \rangle) \\ &= \max\{ \sup_{a \in M} \langle x, a \rangle, \sup_{b \in M} \langle x, b \rangle \} = \sup_{y \in M} \langle x, y \rangle = \varphi_M(x) \end{aligned}$$