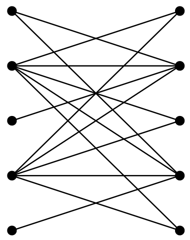
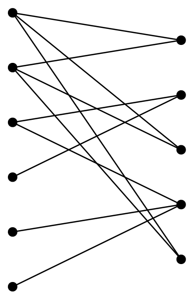
Домашнее задание с 10.11.2017 на 24.11.2017



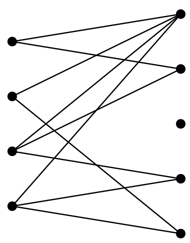
(a)

Рис. 1

1.1 (0,5 балл). Найти максимальное паросочетание в приведенном на рис.1 графе. Доказать, что данное паросочетание максимально.



(a)



(b)

Рис. 2

1.2 (1 балл). Какие из графов, изображенных на рис.2, имеют X-насыщенное паросочетание?

1.3 (1,5 балла). Доказать, что в двудольном графе $G[X, Y]$ существует совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда для любого $S \subseteq V(G)$ выполняется неравенство $|S| \leqslant |N(S)|$. Предъявить бесконечное семейство графов, для которых данное свойство выполняется, а совершенное паросочетание при этом отсутствует.

1.4 (1 балл). Рассмотрим прямоугольную матрицу A, состоящую из нулей и единиц. Пусть l есть максимальное количество единиц, которые можно выбрать так, чтобы никакие две из них не принадлежали одной и той же строке или одному и тому же столбцу матрицы A, а k равно минимальному количеству строк и (или) столбцов, содержащих все единицы матрицы A. К примеру, в матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{1} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

существуют $l = 2$ единицы, обведенные в квадратную рамочку, которые не принадлежат одной и той же строке или одному и тому же столбцу матрицы A. Далее, существует $k = 2$ строки, которые содержат все единицы матрицы A. Доказать справедливость равенства $l = k$ в общем случае.

1.5 (1,5 балла). Доказать теорему Холла, используя теорему Кёнига-Эгервари.

1.6 (1,5 балла). В двудольном графе $G[X, Y]$ обозначим через def(S), $S \subseteq X$, разность между $|S|$ и $|N(S)|$. По определению положим $\mathrm{def}(\varnothing) = 0$. Доказать, что в двудольном графе $G[X, Y]$ существует паросочетание M, состоящее хотя бы из $|X| - d$ ребер, где $d := \max_{S \subseteq X} \mathrm{def(S)}$.

1.7 (2,5 балла). Цепью в частично упорядоченном множестве P называется такое подмножество P_1 множества P, любые два элемента которого сравнимы между собой, а антицепью — подмножество $A \subset P$, любые два элемента которого не сравнимы между собой. С помощью теоремы Кёнига-Эгервари доказать теорему Дилуорса, утверждающую, что в любом конечном частично упорядоченном множестве P минимальное количество k попарно непересекающихся цепей P_i, $i = 1, \ldots, k$, покрывающих все элементы множества P, равно количеству a элементов в максимальной антицепи A.

1.8 (1 балл). Пусть $D_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ есть множество натуральных чисел. Известно, что среди любых трех из них всегда можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое. Доказать, что эти числа можно покрасить в два цвета так, чтобы для любых двух чисел одного цвета одно делилось бы на другое. Обобщить данный результат на случай, когда среди любых m чисел можно выбрать ровно два числа, одно из которых делилось бы на другое.

1.9 (1,5 балла). Пусть в двудольном графе $G[X, Y]$ существует X-насыщенное паросочетание. Доказать, что количество рёбер в $G[X, Y]$, которые не принадлежат ни одному X-насыщенному паросочетанию, не превосходит $\binom{|X|}{2}$.