

Практика 27.10.2017

1.1 (0,5 балла). Чему равно максимальное количество рёберно непересекающихся простых путей, соединяющих любую пару вершин в полном графе K_n ?

1.2 (1 балл). Возьмем некоторую сеть из n вершин. В каждой её вершине, за исключением стока и истока, добавим петлю с пропускной способностью 1, поменяем местами сток и исток, а потом каждое ребро (x, y) заменим на ребро (y, x) с той же пропускной способностью. Как изменится величина максимального потока в такой сети?

1.3 (1 балл). Как использовать алгоритм Форда-Фалкерсона для сети, в которой имеется несколько источников и/или стоков?

1.4 (1,5 балла). После проведения некоторого количества матчей в спортивном турнире команда X набрала известное нам количество побед. Если команда выиграет все оставшиеся матчи, в которых она участвует, то она наберёт W побед. Могут ли остальные матчи завершиться так, чтобы X стала победителем в турнире? Для ответа на поставленный вопрос мы создадим следующего вида сеть:

1. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — все команды кроме команды X . Добавим во множество вершин сети вершины $x_1, \dots, x_n$, соответствующие этим командам.
2. Добавим также в сеть $\binom{n}{2}$ вершин с пометками $y_{i,j}$ — по вершине для каждой неупорядоченной пары различных команд $\{X_i, X_j\}$. В вершину $y_{i,j}$ направим ребра бесконечной пропускной способности из вершин x_i и x_j .
3. Добавим в сеть исток s и сток t .
4. Из истока в каждую из вершин x_i будет идти ребро пропускной способности $W - w_i$, где w_i — количество выигранных командой X_i матчей. Из каждой вершины $y_{i,j}$ в сток направим ребро пропускной способности $a_{i,j}$, равной количеству матчей, в которых команда X_i встретится с командой X_j .

Докажите, что максимальный поток в этой сети равен величине $\sum_{i,j} a_{i,j}$ тогда и только тогда, когда команды могут сыграть так, чтобы ни одна из них не выиграла больше W матчей.

1.5 (0,5 балла). Найти количество совершенных паросочетаний в полном графе на четном числе вершин.

1.6 (0,5 балла). Подсчитать количество совершенных паросочетаний у дерева на n вершинах.

1.7 (0,5 балла). Найти количество совершенных паросочетаний в колесе W_n .

1.8 (1 балл). Подсчитать количество совершенных паросочетаний в полном двудольном графе $K_{n,n}$. Как изменится ответ для графа $K_{n,n}$, в котором удалили ребра, входящие в одно из совершенных паросочетаний?

1.9 (1 балл). Пусть S есть подмножество множества $V(G)$ вершин графа G , покрытое некоторым паросочетанием M . Доказать, что некоторое максимальное паросочетание также покрывает все вершины этого множества. Верно ли, что данный факт будет выполняться для любого максимального паросочетания?

1.10 (1 балл). Пусть M и M' есть два паросочетания в графе G . Описать структуру их симметрической разности $M \Delta M'$. Как изменится эта структура в случае, если паросочетания M и M' максимальны или совершенны?

1.11 (1 балл). Подсчитать количество совершенных паросочетаний у дерева на n вершинах, используя результаты предыдущего утверждения.

1.12 (1,5 балла). Пусть M и N есть два паросочетания в графе G , такие, что $|N| > |M|$. Доказать, что существуют паросочетания M' и N' , такие, что $|M'| = |M| + 1$, $|N'| = |N| - 1$, $M' \cup N' = M \cup N$ и $M' \cap N' = M \cap N$.

1.13 (1 балл). Найдите минимальный пример двудольного графа, в котором существует паросочетание, наибольшее по включению, не являющееся максимальным.

1.14 (1,5 балла). Определить минимальный размер наибольшего по включению паросочетания в простом цикле C_{11} , построенном на одиннадцати вершинах. Чему будет равен этот размер в случае произвольного простого цикла C_n ?