Содержание

1 Линейная алгебра.

1.0.1 Вступление. Система линейных уравнений. Векторы.

Пусть K — фиксированное поле. Под линейным уравнением с неизвестными $x_1, \ldots, x_n$ будем подразумевать уравнение вида

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b, a_i, b \in K.$$

Линейное уравнение называется однородным, если $b = 0$.

Система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} . \qquad (1)$$

Рассмотрим матрицу системы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{12} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Определение 1 *Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной в противном случае.*

Системы уравнений называются эквивалентными, если множества их решений совпадают.

Заметим, что системы, полученные друг из друга при помощи следующих действий будут эквивалентными.

1. Умножение строки на число, отличное от нуля.
2. Прибавление к одной строке другой, умноженной на любое число.
3. Перемена строк местами.

Данные преобразования будем называть элементарными.

Матрица, столбец. Умножение матрицы на столбец. Линейная комбинация столбцов. К более строгому определению этих понятий мы подойдем чуть позже.

1.1 Векторные пространства. Подпространства. Линейные комбинации. базис. Размерность.

Пусть K — поле.

Определение 2 *Векторным(линейным) пространством над полем K называется множество V с операциями сложения $+ : V \times V \longrightarrow V$ и умножения на элементы поля K $\cdot : K \times V \longrightarrow V$, обладающими следующими свойствам:*

1. *V абелева группа относительно сложениям;*
2. *$\lambda(v + u) = \lambda v + \lambda u$ для всех $\lambda \in K$, $u, v \in V$;*
3. *$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ для всех $\lambda, \mu \in K$, $v \in V$;*

4. $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$ *для всех* $\lambda, \mu \in K$, $v \in V$;

5. $1v = v$ *для любого* $v \in V$.

Элементы векторного пространства будем называть векторами, а элементы поля K числами или скалярами.

Примеры.

1. K^n — пространство столбцов длины n.
2. Пространство строк длины n. Элементы пространства строк часто будем называть ковекторами.
3. $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$.
4. $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$.
5. Пусть K, L — поля, причем $K \subset L$. В этом случае L/K будем называть расширением полей. Заметим, что L можно рассматривать как векторное пространство над полем K.
6. $K[x]$.
7. Пространство строк из элементов поля K бесконечной длины.
8. Пространство непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$.

Определение 3 *Подмножество* $U \subseteq V$ *векторного пространства* V *называется подпространством, если оно само является векторным пространством относительно тех же операций, которые заданы на* V*.*

Лемма 1 *Подмножество* $U \subseteq V$ *является подпространством в том и только в том случае, если* $u + v, \alpha u \in U$ *для любых* $u, v \in U, \alpha \in K$.

1.1.1 Линейная комбинация. Базис. Размерность.

Определение 4 *Пусть* $u_1, \ldots, u_n \in V$*. Линейной комбинацией векторов* $u_1, \ldots, u_n$ *называется сумма*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_i u_i,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$*.*

Определение 5 • *Линейная оболочка множества векторов* X *есть наименьшее подпространство, содержащее* X*. Оно обозначается* $\langle X \rangle$ *и* $\langle X \rangle = \cap_{X \subseteq U, U \leqslant V} U$.

- *Множество X называется системой образующих пространства V, если $\langle X\rangle = V$.*
- *Пространство называется конечномерным, если у него есть система образующих из конечного числа векторов.*

Лемма 2 $\langle S\rangle = \{\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k | u_1, \ldots, u_n \in S, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K\}$.

Лемма 3 *Если вектор v является линейной комбинацией векторов из множества S, то $\langle S\rangle = \langle S \cup \{v\}\rangle$.*

1.1.2 Базис. Размерность.

Определение 6
- *Векторы $u_1, \ldots, u_n$ называются линейно зависимыми, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулю. В противном случае векторы $u_1, \ldots, u_n$ называются линейно независимыми.*
- *Базисом называется линейно независимая система образующих.*

Замечание 1 *Набор векторов линейно зависим тогда и только тогда, когда хотя бы один из низ является линейной комбинацией остальных.*

Часто, когда говорят о базисе подразумевают упорядоченный набор векторов. Базисом нульмерного пространства будем считать пустое множество векторов.

Теорема 1 *(Эквивалентные определения базиса). Следующие условия на векторы $u_1, \ldots, u_n$ векторного пространства V эквивалентны.*

1. *$u_1, \ldots, u_n$ — базис.*
2. *$u_1, \ldots, u_n$ — максимальная линейно независимая система.*
3. *$u_1, \ldots, u_n$ — минимальная система образующих.*
4. *Для любого $v \in V$ существует единственный набор $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ такой, что $v = \sum_{k=1}^n \alpha_i u_i$.*

Доказательство. $1 \Longrightarrow 2$

Утверждение о том, что $u_1, \ldots, u_n$ — максимальная линейно независимая система означает, что любая система $u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_n$ линейно зависима. Раз u_{n+1} по базису $u_1, \ldots, u_n$. $u_{n+1} = \sum_1^n \alpha_i u_i$. Тогда

$$u_{n+1} - \sum_1^n \alpha_i u_i = 0.$$

$2 \Longrightarrow 3$

Пусть v произвольный вектор пространства V. Система $u_1, \dots, u_n, v$ линейно зависима, а значит

$$\sum_1^n \alpha_i u_i + \alpha v = 0 \tag{2}$$

для некоторых $\alpha_i, \alpha \in K$, среди которых не все равны 0. Если $\alpha = 0$, то из (2) получаем

$$\sum_1^n \alpha_i u_i = 0.$$

Откуда, в силу линейной независимости системы $u_1, \dots, u_n$ все α_i равны 0. Значит $\alpha \neq 0$ и,

$$v = -\sum_1^n \frac{\alpha_i}{\alpha} u_i.$$

Таким образом $u_1, \dots, u_n$ является системой образующих. Покажем, что $u_1, \dots, u_n$ минимальная система образующих. Пусть $I \subset \{1, \dots, n\}, I \neq \{1, \dots, n\}$. Покажем, что система $\{u_i\}_{i \in I}$ не является системой образующих. Рассмотрим u_j, где $j \notin I$. Если $\{u_i\}_{i \in I}$ является системой образующих, то существуют такие $\alpha_i \in K$, что $u_j = \sum_{i \in I} \alpha_i u_i$, откуда $u_j - \sum_{i \in I} \alpha_i u_i = 0$, что противоречит линейной независимости $u_1, \dots, u_n$.

$3 \Longrightarrow 4$

Пусть $v \in V$. Так как $u_1, \dots, u_n$ система образующих, то существует набор $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ такой, что $v = \sum_{k=1}^n \alpha_i u_i$. Остается показать единственность такого набора. Предположим, что найдется два различных набора $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и $\beta_1, \dots, \beta_n$, что $v = \sum_{k=1}^n \alpha_i u_i = \sum_{k=1}^n \beta_i u_i$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) u_i = 0.$$

Поскольку наборя $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$ различны, то хотя бы одно из значений $\alpha_i - \beta_i$ не равно нулю. Для простоты дальнейших рассуждений предположим, что $\alpha_n - \beta_n \neq 0$. Тогда

$$u_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i - \beta_i}{\alpha_n - \beta_n} u_i.$$

Откуда по лемме 3 набор векторов $u_1, \dots, u_{n-1}$ тоже является системой образующих, что противоречит минимальности системы $u_1, \dots, u_n$.

$4 \Longrightarrow 1$

Очевидно, что набор векторов $u_1, \dots, u_n$ является системой образующих. Вектор $0 \in V$ единственным образом представим в виде $0 = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot u_i$. Отсюда следует, что векторы $u_1, \dots, u_n$ линейно независимы.

□

Теорема 2 *(о существовании базиса). Пусть $X \subseteq Y \subseteq V$, причем X — линейна независима, а Y — система образующих. Тогда существует базис Z, содержащий X и содержащийся в Y.*

Доказательство.(см. [1, теорема 2.2]) Пусть

$$A = \{B : B - \text{линейно независима и } X \subseteq B \subseteq Y\}.$$

Всякое линейно упорядоченное (по включению) подмножество множества A имеет верхнюю грань (объединение). По лемме Цорна A содержит максимальный элемент Z.

Покажем, что Z — система образующих. Пусть $y \in Y \setminus Z$. Так как Z максимально, то $Z \cup \{y\}$ линейно зависимо, поэтому y является линейной комбинацией элементов из Z. Таким образом $\langle Z \rangle \supseteq \langle Y \rangle = V$.

□

Лемма 4 *(Лемма о замене) Пусть B — базис пространства V, $u \in B$, а вектор $v \in V$ не лежит в $\langle B \setminus \{u\} \rangle$. Тогда множество $\{B \setminus \{u\} \cup \{v\}\}$ также является базисом пространства V.*

Доказательство.(см. [1, лемма 3.1]) $\{B \setminus \{u\} \cup \{v\}\}$ — система образующих.

Т.к. B базис, то

$$v = \sum \alpha_i b_i + \alpha u, \ \alpha \neq 0 \tag{3}$$

$$u = \frac{1}{\alpha} v - \sum \alpha_i b_i \in \langle B \setminus \{u\} \cup \{v\}.$$

А, значит, $V = \langle B \rangle \subseteq \langle B \setminus \{u\} \cup \{v\} \rangle$.

$\{B \setminus \{u\} \cup \{v\}\}$ — линейно независима.

Пусть $\beta v + \sum \beta_i b_i = 0$, $b_i \neq u$. Подставим (3), получим

$$\alpha\beta u + \beta \sum \alpha_i b_i + \sum \beta_i b_i = 0.$$

А значит все коэффициенты этой линейной комбинации равны нулю, поэтому $\beta = 0$(т.к. $\alpha \neq 0$). А, значит и $\beta_i = 0$.

$\square$

Теорема 3 *Любые два базиса пространства V равномощны.*

Доказательство. Здесь будет рассмотрен только случай конечномерного пространства. Для бесконечномерного случая теорема сохраняет силу. Пусть B и C два базиса и $|B| > |C| = n$. Применяя нужное количество раз лемму о замене получим, что система $B \setminus \{b_1, \dots, b_n\} \cup C$ тоже является базисом, но $B \setminus \{b_1, \dots, b_n\} \cup C \supsetneq C$, что противоречит тому, что C максимальная линейно независимая система. $\square$

Определение 7 *Количество элементов в базисе называется размерностью пространства*

Упр. 1 *Найдите размерности пространств из примеров 1.1.*

Как мы увидим позже, всякое конечномерное векторное пространство изоморфно пространству K^n. Поэтому следующий пример является одним из важнейших.

Пример. Рассмотрим пространство столбцов K^n. Нетрудно проверить, что набор столбиков

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

является базисом K^n. Этот базис пространства K^n будем называть стандартным. Для вектора $x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in K^n$ числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ являются координатами вектора x в стандартном базисе.

1.1.3 Бесконечномерный случай

Множество $X \subseteq V$ называется линейно независимым, если любой конечный набор векторов множество X линейно независим. Другими словами множество векторов линейно независимо если никакая конечная нетривиальная линейная комбинация его векторов не обращается в нуль.

Напомним, что в бесконечномерном случае верна теорема 3, т.е. любые два базиса пространства имеют одинаковую мощность. примеры

Определение 8 *Пусть U подпространство векторного пространства V. Факторпространством V/U называется пространство, которое совпадает с V/U как абелева группа и с умножением на число, определенным с помощью формулы*

$$\alpha \cdot (v + U) = \alpha v + U.$$

Нетрудно убедиться, что V/U является векторным пространством.

1.2 Линейные отображения.

Гомоморфизмы векторных пространств называются линейными операторами или линейными отображениями. Изоморфизмом векторных пространств, как обычно, называется биективный гомоморфизм.

Определение 9 *Пусть V и U — векторные пространства над полем K. Отображение*

$$\varphi : V \longrightarrow U$$

называется линейным, если

1. *$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ для любых $x, y \in V$;*
2. *$\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ для любых $\lambda \in K$, $x \in V$.*

Пусть $\varphi : V \longrightarrow U$ линейное отображение. Отметим очевидные свойства:

1. $\varphi(0) = 0$, $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, $\varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y)$.

Примеры:

1. Поворот.
2. Ортогональное проектирование.
3. Дифференцирование в $K[x]$.
4. Проектор.

Определение 10 *Пусть V — векторное пространство над полем K и, одновременно, кольцо с той же операцией сложения. Если выполнено $\alpha(ab) = (\alpha a)b$, $\forall a, b \in V, \alpha \in K$, то V называется алгеброй над полем K.*

Множество линейных отображений $V \longrightarrow V$ с операцией поточечного сложения, композиции и умножения на число является алгеброй с единицей. Эта алгебра обычно обозначается $\mathrm{End}(V)$. Мультипликативная группа кольца $\mathrm{End}(V)$ состоит из автоморфизмов пространства V и обозначается $\mathrm{GL}(V)$ или $\mathrm{Aut}(V), (\mathrm{End}(V))^*$.

1.2.1 Ядро линейного оператора. Размерность ядра и образа.

Пусть U и V — векторные пространства над полем K, $\varphi : U \longrightarrow V$ — линейное отображение.

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{v \in U : \varphi(v) = 0\}, \qquad \operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(v) : v \in U\}.$$

Нетрудно проверить, что $\operatorname{Ker}\varphi$ — подпространство U, а $\operatorname{Im}\varphi$ — подпространство V.

Упр. 2 *Найти ядро и образ отображений из примеров.*

В силу определения линейное отображение является также гомоморфизмом соответвующих абелевых групп. Из уже известных нам фактом про абелевы группы следует следующее утверждение.

Предложение 1 *1. Линейно отображение $\varphi : U \longrightarrow V$ инъективно тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker}\varphi = 0$.*

2. Для любого $b \in V$ множество решений уравнения

$$\varphi(x) = b$$

имеет вид $a + \operatorname{Ker}\varphi$, где $a \in \varphi^{-1}(b)$.

Заметим также, что ядра линейных операторов и только они являются подпространствами векторного пространства. Множества вида $a+U = a+\operatorname{Ker}\varphi$, где $a \in V$, а U — подпространство V иногда называют аффинными.

1.2.2 Теорема о гомоморфизме. Размерность факторпространства.

Тем же способом, что и для групп можно доказать следующую теорему.

Теорема 4 *(Теорема о гомоморфизме для векторных пространств.)Пусть U и V — конечномерные векторные пространства над полем K, а $\varphi : U \longrightarrow V$ — линейное отображение. Тогда*

$$\operatorname{Im}\varphi \cong U/\operatorname{Ker}\varphi.$$

Лемма 5 *Пусть V — подпространство конечномерного пространства U. Тогда $\dim V/U = \dim V - \dim U$.*

Доказательство.

Пусть $u_1, \dots, u_m$ — базис пространства U. Дополним его до базиса пространства V (это можно сделать по теореме о существовании базиса). Обозначим получившийся базис $u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n$. Пусть $\pi : V \longrightarrow V/U$ естественный эпиморфизм, т.е. $\pi(v) = v + U$. Для краткости обозначим $\bar{v} = \pi(v)$.

Покажем, что все смежные классы $\overline{u}_{m+1}, \ldots, \overline{u}_n$ различны и образуют базис V/U.

линейная независимость:

Пусть

$$\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i \bar{u}_i = 0,$$

причем не все α_i равны нулю. Такое равенство означает, что $\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i u_i \in U$, а значит $\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$. Последнее противоречит линейной независимости векторов $u_1, \ldots, u_n$.

Утверждение о том, что смежные классы $\overline{u}_{m+1}, \ldots, \overline{u}_n$ различны и порождают V/U доказывается еще проще. $\square$

Размерность ядра и образа. Следующая теорема является следствием леммы 5 и теоремы о гомоморфизме.

Теорема 5 *Пусть U и V — конечномерные векторные пространства над полем K, а $\varphi : U \longrightarrow V$ — линейное отображение. Тогда*

$$\dim U = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi.$$

Для линейного отображения φ размерность его образа называется рангом отображения, т.е. $\operatorname{rk} \varphi = \dim \operatorname{Im} \varphi$.

1.3 Прямая сумма векторных пространств.

Сумма векторных пространств. Для подмножеств $U, V \subseteqq W$ будет обозначать $U + V = \{u + v | u \in U, v \in V\}$. Заметим, что если U и V являются подпространствами W, то $U + V, U \cap V$, а также, и $\cap_{i \in I} U_i$ любого семейстав подпространств тоже подпространство.

Напомним, что для подпространств U, W пространства V их сумма $U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$ снова является подпространством. Аналогично можно определить и $U_1 + \ldots + U_n = \{u_1 + \ldots + u_n \mid u_i \in U_i, i = 1..n\}$ для подпространств $U_1, \ldots, U_n$. Стоит однако упомянуть, что объединение двух подпространств вовсе не обязательно является подпространством (приведите пример).

Лемма 6 *Пусть $U, W, U_1 \ldots, U_n$ подпространства V. Тогда*

1. $\langle \cup_{i=1}^{n} U_i \rangle = U_1 + \ldots + U_n$.
2. $U + W = W + U$;
3. $U + W = U \Longleftrightarrow W \leqslant U$.

Прямая сумма векторных пространств.

Определение 11 • *Пространство V называется (внутренней) прямой суммой подпространств $U_1, \ldots, U_n$ и обозначается $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$, если каждый вектор $v \in V$ единственным образом представляется в виде $v = u_1 + \ldots + u_n$, где $u_i \in U_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.*

- *Пусть $U_1, \ldots, U_n$ — произвольные векторные пространства. Их (внешней) прямой суммой называется их декартово произведение $U_1 \times \ldots \times U_n$ с покомпонентными операциями.*

Лемма 7 *1. Сумма подпространств $U_1 + \ldots + U_n$ является прямой тогда и только тогда, когда*

$$0 = u_1 + \ldots + u_n,\ u_i \in U_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n \Longrightarrow u_i = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

2. Сумма подпространств $U_1 + \ldots + U_n$ является прямой тогда и только тогда, когда

$$U_i \cap U_1 + \ldots + U_{i-1} + U_{i+1} + \ldots + U_n = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

3. Сумма подпространств $U + W$ является прямой тогда и только тогда, когда $U \cap W = \{0\}$.

Доказательство.

1. Импликация в одну сторону тривиальна. Покажем, что если 0 единственным образом представим в виде суммы векторов из U_i, то сумма U_i прямая. Пусть вектор v двумя способами представляется в виде $v = u_1 + \ldots + u_n = u_1' + \ldots + u_n'$. Тогда $(u_1 - u_1') + \ldots + (u_n - u_n') = 0$, а значит $u_i = u_i', \forall 1 \leqslant i \leqslant n$.

2. 2 Обозначим $W_i := U_1 + \ldots + U_{i-1} + U_{i+1} + \ldots + U_n$. Всякий вектор из $U_i \cap W_i$ двумя хотя бы способами представляется в виде суммы векторов из U_i, поэтому, если $U_i \cap W_i \neq \{0\}$, то сумма подпространств $U_1 + \ldots + U_n$ не является прямой. Обратно, пусть $U_i \cap W_i = \{0\}$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$ и, пусть, $0 = u_1 + \ldots + u_n$, $u_i \in U_i$, причем не все u_i равны 0. Пусть $u_{i_1} \neq 0$, тогда $u_{i_1} = -\sum_{i \neq i_1} u_i \in U_{i_1} \cap W_{i_1}$, что противоречит тому, что $U_i \cap W_i = \{0\}$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$.

3. Следует из предыдущего пункта.

□

Предложение 2 *1. (a) Пусть $V_1, \ldots, V_n$ — произвольные пространства. Отображения*

$$\mu_i : V_i \longrightarrow V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$$
$$v_i \mapsto (0, \ldots, v_i, \ldots, 0)$$

являются мономорфизмами (инъективными гомоморфизмами) векторных пространств.

(b) Если $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$, то внешняя пряма сумма пространств $V_1, \ldots, V_n$ изоморфна внутренней, т.е. V.

2. Если $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$, то объединение базисов подпространств V_i является базисом пространства V.

3. Если все пространства V_i конечноменры, то $\dim(V_1 \oplus \ldots \oplus V_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim V_i$

Доказательство.

1. (a) .

   (b) Каждый вектор внутренней прямой суммы подпространств однозначно представляется в виде $v_1 + \ldots + v_n$, $v_i \in V_i$. Рассмотрим отображение $f(v_1 + \ldots + v_n) = (v_1, \ldots, v_n) \in V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$. Оно является изоморфизмом.

2. Линейная независимость следует из определения прямой суммы и п.1. леммы 7.

3. Следует из предыдущего пункта.

Теорема 6 *(формула Грассмана) Пусть U, W — конечномерные подпространства векторного пространства V. Тогда*

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Доказательство.(см. [?, стр. 26])или ([1, стр 34]) Зададим линейное отображение φ из внешней прямой суммы $U \oplus W$ в V с помощью формулы $\varphi(u, w) = u + w$. Легко проверить, что $\operatorname{Im} \varphi = U + W$, $\operatorname{Ker} \varphi = \{(u, -u) | u \in U \cap W\} \cong U \cap V$. Теперь теорема следует из теоремы о размерности ядра и образа. □

1.4 Матрицы. Часть 1.

Определение 12 *Двумерный массив $m \times n$ элементов поля K называется матрицей размера m на n над K.*

Пусть $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ обозначает множество всех таких матриц. Вместо $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ будем писать $\mathrm{Mat}_n(K)$. В зависимости от контекста элемент матрицы A расположенный в i-й строке j-м столбце будет обозначаться a_{ij}, A_{ij} или a^i_j, A^i_j.

На множестве матриц $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ введем операции сложения и умножения на число. Для $\alpha \in K$ и $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ положим

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij};$$
$$(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij}.$$

Нетрудно убедиться, что относительно введенных операций $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ является векторным пространством размерности mn над полем K.

Стандартным базисом этого пространства будем называть базис состоящий из матриц e^j_i, где e^j_i матрица из $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ у которой в i-й строке j-м столбце стоит 1, а на остальных местах 0. Легко проверить, что $A = \sum_{i,j=1}^{n,m} a^i_j e^j_i$ для любой $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$.

Отметим, что пространства строк и столбцов можно рассматривать как $\mathrm{Mat}_{1\times n}(K)$ и $\mathrm{Mat}_{n\times 1}(K)$ соответственно. Выше уже обсуждалось умножение матрицы размера m на n на столбец. Обобщим это определение

Произведением матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ на матрицу $B \in \mathrm{Mat}_{n\times k}(K)$ называется матрица $C = AB \in \mathrm{Mat}_{m\times k}(K)$ определенная формулой

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}.$$

В случае, когда количество столбцов левой матрицы не равно количеству строк правой, произведение матриц не определено. Заметим, что произведение матриц некоммутативно.

Теорема 7 *1. Произведение матриц обладает следующими свойствами: для любых матриц A, B, C и $\alpha \in K$, если определены соответствующие произведения, то*

$$(AB)C = A(BC);\ A(B+C) = AB + AC;\ (B+C)A = BA + CA;$$
$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

2. $\mathrm{Mat}_n(K)$ с операциями сложения и умножения является кольцом с единицей.

Доказательство

$$((AB)C)^i_j = \sum_k (\sum_l a^i_l b^l_k) c^k_j = \sum_k \sum_l a^i_l b^l_k c^k_j$$
$$(A(BC))^i_j = \sum_l a^i_l (\sum_k b^l_k c^k_j) = \sum_l \sum_k a^i_l b^l_k c^k_j.$$

Аналогично проверяются остальные утверждения теоремы. □

Единицу кольца $\mathrm{Mat}_n(K)$ будем обозначать символом E. Т.е.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нулевой элемент кольца $\mathrm{Mat}_n(K)$ чаще всего будет обозначаться просто 0, но иногда будем писать $\mathbb{O}$. Кольцо матриц дает нам важный пример некоммутативного кольца (при $n > 1$).

Группа обратимых элементов кольца $\mathrm{Mat}_n(K)$ обозначается $\mathrm{GL}_n(K)$.

1.5 Линейные операторы. Связь с матрицами.

1.5.1 Классификация конечномерных векторных простарнств.

Лемма 8 *Пусть U — векторное пространство над полем K, а $e = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис U. Тогда имеется следующий изоморфизм векторных пространств:*

$$\varphi_e : U \longrightarrow K^n$$
$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ называются координатами вектора $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ в базисе e.

Следствие 1 *Любое конечномерное векторное пространство V изоморфно $K^{\dim V}$. Все векторные пространства одной и той же размерности изоморфны.*

1.5.2 Связь линейных отображений и матриц.

Для удобства изложения введем следующие обозначения:

Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис пространства V и $x \in V$. Тогда существует однозначно определенный набор чисел $\alpha_i \in K$ такой, что $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. Обозначим через x^e столбик $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in K^n$. Тогда последнее равенство удобно записать в виде

$$x = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = e x^e.$$

Линейные отображения.

Лемма 9 *Линейное отображение однозначно определяется образами базисных векторов. Другими словами, если $e = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис пространсва U, а $f_1, \ldots, f_n$ — векторы пространства V, то существует единственное линейное отображение $\varphi : U \longrightarrow V$ такое, что $\varphi(e_i) = f_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Доказательство. Пусть $\varphi : U \longrightarrow V$ линейное отображение. $e = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис U. Тогда

$$\varphi(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(e_i).$$

С другой стороны, если $v_1, \ldots, v_n$ — произвольные векторы пространства V, то нетрудно убедиться, что отображение

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

является линейным и переводит e_i в v_i. $\square$

Лемма 10 *Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис пространсва U, а $\varphi : U \longrightarrow V$ линейное отображение такое, что $\varphi(e_i) = f_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Обозначим набор векторов $f = (f_1, \ldots, f_n)$.*

1. *φ инъективен тогда и только тогда, когда f линейно независим.*
2. *φ сюръективен тогда и только тогда, когда f — система образующих.*
3. *φ биективен тогда и только тогда, когда f — базис.*

Доказательство.

1.

$$f \text{ линейно зависим } \iff$$

$$\iff \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n : \text{ не все равные нулю } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(e_i) = 0 \iff$$

$$\iff \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n : \varphi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) = 0 \iff 0 \neq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in \operatorname{Ker} \varphi \iff$$

$$\iff \varphi \text{ не инъективен.}$$

2.

$$\operatorname{Im} \varphi = \{f(u) | u \in U\} = \{f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) | \alpha_i \in K\} = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i) | \alpha_i \in K\} =$$

$$= \langle f(e_i) \rangle.$$

3. Следует из предыдущих пунктов.

Следствие 2 *Два конечномерных векторных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.*

Пусть в векторных пространствах U и V зафиксированы базисы $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Поскольку всякий линейный оператор $a : U \longrightarrow V$ однозначно определяется образами базисных векторов, то оператор a однозначно определяется матрицей $a_e^f = \begin{pmatrix} a(e_1)^f & a(e_2)^f & \ldots & a(e_n)^f \end{pmatrix}$ и всякая матрица из $\mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$ определяет соответствующий оператор.

Для строки векторов $u = (u_1, \ldots, u_m)$ пространства U и линейного оператора $\varphi : U \longrightarrow V$ положим $\varphi(u) = (\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_m))$.

Предложение 3 *Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис U, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис V.*

1. *Пусть $\varphi : U \longrightarrow V$ — линейное отображение. Тогда существует и единственная матрица $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$ такая, что для любого $u \in U$ имеет место равенство*
$$(\varphi(u))^f = Au^e.$$
2. *Для всякой матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$ соотношение $(\varphi(u))^f = Au^e$ определяет линейное отображение $\varphi : U \longrightarrow V$.*

Доказательство.

1. Рассмотрим $A = \begin{pmatrix}\varphi(e_1)^f & \varphi(e_2)^f & \dots & \varphi(e_n)^f\end{pmatrix}$. В силу линейности φ нетрудно проверить, что
$$(\varphi(u))^f = (\varphi(eu_e))^f = (\varphi(e)u_e)^f = Au_e.$$
Единственность матрицы A очевидна.
2. Следует из леммы 8.

□

Матрица A из последнего предложения называется матрицей отображения φ в базисах e и f. Иногда мы будем обозначать ее φ_e^f или просто φ_e, в случае, если $e = f, U = V$.

Примеры.

1. Поворот на плоскости на угол φ задается матрицей $\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$.
2. Пусть $V = U \oplus W$, рассмотрим отображение
$$\begin{gathered}\varphi : V \longrightarrow V \\ (u, w) \mapsto u.\end{gathered}$$
Заметим, что φ — линейное отображение, причем $\varphi^2 = \varphi$, $\operatorname{Im}\varphi = U$.
3. Дифференцирование многочленов не более чем 3-й степени. Рассмотрим базис $1, x, x^2, x^3$. Относительного выбранного базиса матрица оператора дифференцирования имеет вид: $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Матрица композиции операторов

Предложение 4 *Матрица композиции линейных операторов является произведением матриц этих операторов. Точнее, если U, V и W — конечномерные векторные пространства с базисами e, f и g, соответственно, а $\varphi : U \longrightarrow V$ и $\psi : V \longrightarrow W$ — линейные отображения, то $(\psi \circ \varphi)_e^g = \psi_f^g \cdot \varphi_e^f$. В частности, при $U = V = W$ и $e = f = g$ получаем $(\psi \circ \varphi)_e = \psi_e \circ \varphi_e$.*

Доказательство.
$$((\psi \circ \varphi)_e^g)_j = ((\psi \circ \varphi)(e_j))^g = (\psi(\varphi(e_j)))^g = [] = \psi_f^g \cdot (\varphi(e_j))^f = \psi_f^g \cdot (\varphi_e^f)_j.$$
□

Предложения 3 и 4 можно переформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема 8 *Пусть U и V — векторные пространства над полем K размерностей n и m соответственно пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис U, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис V. Тогда*

1. *Имеется изоморфизм между векторным пространством операторов $U \longrightarrow V$ и пространством матриц $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$.*
2. *Имеется изоморфизм алгебр*

$$\mathrm{End}(U) \cong \mathrm{Mat}_n(K),$$
$$\varphi \mapsto \varphi_e.$$

Замена базиса. Матрица перехода. Очевидно, что изоморфизм из леммы 8 зависит от выбора упорядоченного базиса. Изучим как связаны координаты фиксированного вектора в двух различных базисах.

Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис пространства V и $x \in V$.

$$x = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = ex^e.$$

Пусть $f = (f_1, \ldots, f_n)$ — другой базис пространства V. Разложим каждый из векторов базиса f по базису e. Пусть

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ji} e_j, \; 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Используя привычное обращение с матрицами последние равенства можно записать в виде

$$f = eC = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 13 *Матрица C называется матрицей перехода от базиса e к базису f и иногда мы будем обозначать ее C^e_f.*

Отметим, что в стобцах матрицы перехода стоят координаты "новых" базисных векторов в "старом" базисе. Т.е. $C^e_f = \begin{pmatrix} f^e_1 & f^e_2 & \ldots & f^e_n \end{pmatrix}$. Легко видеть, что $C^e_e = E$.

Матрицу перехода C^f_e можно рассматривать как матрицу автоморфизма пространства V, переводящего базис e в базис f (в базисе e) или же как матрицу тождественного автоморфизма относительно базисов e и f (т.е. $C_e^f = (id)_e^f$).

Из предложения 3 следует следующая лемма.

Лемма 11 $C_e^f = (C_f^e)^{-1}$.

Наблюдения. Заметим, что если упорядоченный набор векторов $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ линейно независим, то для любых $a, b \in K^m$ равенство $\mathbf{f}a = \mathbf{f}b$ эквивалентно равенству $a = b$. Действительно,

$$\mathbf{f}a = \mathbf{f}b \Longleftrightarrow \mathbf{f}(a - b) = 0 \Longleftrightarrow a - b = 0 \Longleftrightarrow a = b.$$

Применяя полученное наблюдение к столбцам матриц, легко видеть, что для любых $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ равенство $\mathbf{f}A = \mathbf{f}B$ эквивалентно равенству $A = B$.

Преобразование координат при замене базиса Пусть $\mathbf{f} = (f_1 \dots, f_n)$ и $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базисы пространства V и v — произвольный вектор из V. Тогда

$$fv^f = v = ev^e = fC_e^f v^e.$$

Откуда в силу наблюдений предыдущего параграфа имеем

$$v^f = C_e^f v^e.$$

Последняя формула дает связь координат вектора в базисе f с его координатами в бвзисе e.

1.5.3 Изменение матрицы оператора при замене базиса.

Предложение 5 *Пусть e и e' — базисы пространства U, f и f' — базисы пространства V, $\varphi : U \longrightarrow V$ — линейное отображение. Тогда*

$$\varphi_{e'}^{f'} = C_f^{f'} \varphi_e^f C_{e'}^e.$$

Доказательство. В силу предложения 4

$$\varphi_{e'}^{f'} = (\mathrm{id} \circ \varphi \circ \mathrm{id})_{e'}^{f'} = (\mathrm{id} \circ \varphi)_e^{f'} \, \mathrm{id}_{e'}^e = \mathrm{id}_f^{f'} \varphi_e^f \, \mathrm{id}_{e'}^e = C_f^{f'} \varphi_e^f C_{e'}^e.$$

Но можно проверить и непосредственно

$$(\varphi_{e'}^{f'})_j = (\varphi(e'_j))^{f'} = C_f^{f'} (\varphi(e'_j))^f = C_f^{f'} \varphi_e^f (e'_j)^e = C_f^{f'} \varphi_e^f (C_{e'}^e)_j.$$

□

1.6 Решение системы линейных уравнений.

1.6.1 Решение системы линейных уравнений. Общий вид

В этом параграфе опишем множество решений системы линейных уравнений. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \tag{4}$$

Рассмотрим матрицу системы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{12} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Ей соответствует линейное отображение

$$\begin{gathered} \varphi : K^n \longrightarrow K^m \\ x \mapsto Ax. \end{gathered}$$

Легко проверить, что в стандартных базисах матрица отображения φ совпадает с A. Пусть $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$. Тогда наша система уравнений переписывается в виде

$$Ax = b.$$

Иными словами требуется найти $\varphi^{-1}(b)$.

Матрицу $(A|b)$ называют расширенной матрицей системы.

Как было показано выше, множество решений системы имеет вид $a+\operatorname{Ker}\varphi$, где a какое-нибудь решение системы $Ax = b$ (его обычно называют частным решением). В свою очередь $\operatorname{Ker}\varphi$ можно рассматривать как множество решений системы $Ax = 0$. Соответсвующую систему линейных уравнений называют однородной.

Таким образом для того, чтобы найти все решения системы (4) достаточно найти какое-нибудь одно ее решение и описать пространство $\operatorname{Ker}\varphi$. Для описания подпространства $\operatorname{Ker}\varphi$ достаточно найти базис этого пространства.

Определение 14 *Набор базисных векторов пространства* $\operatorname{Ker}\varphi$ *называется фундаментальной системой решений однородной системы уравнений.*

Как было показано выше $\dim\operatorname{Ker}\varphi = n - \operatorname{rk}\varphi$. Целью ближайших параграфов будет определение ранга оператора и описание фундаментальной системы решений.

Следует отметить, что найти фундаментальную решений системы линейных уравнений проще всего когда матрица системы диагональна, и довольно просто когда матрица системы имеет треугольный вид, т.е., например, все ее элементы ниже главной диагонали нулевые. Для всякой системы линейных уравнений найдем эквивалентную ей систему со ступенчатой матрицей.

В параграфе 1.0.1 были перечислены элементарные преобразования системы линейных уравнений. Поскольку матричная запись гораздо удобнее, перейдем сразу на язык матриц. Будем работать с расширенной матрицей системы.

Определение 15 *Элементарными преобразованиями строк матрицы называются преобразования следующих типов:*

1. *прибавление к одной строке другой, умноженной на число;*
2. *умножение одной строки на число, отличное от нуля.*
3. *перестановка двух строк;*

Напомним, что стандартным базисом пространства матриц состоит из матриц e_i^j, где e_i^j матрица из $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ у которой в i-й строке j-м столбце стоит 1, а на остальных местах 0.

Каждое из элементарных преобразований равносильно домножению матрицы слева на обратимую матрицу.

- Прибавление к i-й строке j-й, умноженной на число α соответствует умножению слева на матрицу $E+\alpha e_i^j$.
- Умножение i-й строки на α соответствует умножению слева на матрицу $E+(\alpha-1)e_i^i$.
- Перестановка i-й и j-й строк соответствует умножению слева на матрицу $E+e_i^j-e_i^i+e_j^i-e_j^j$.

Матрицы, имеющие вид $E+\alpha e_i^j$, где $\alpha\in K, i\neq j$ иногда называют трансвекциями, а матрицы вида $E+(\alpha-1)e_i^i$ псевдоотражениями. Трансвекции и псевдоотражения будем называть элементарными матрицами.

Упр. 3 *Покажите, что третье элементарное преобразование (перестановка строк) может быть получено с помощью конечного числа преобразований первых двух видов. Другими словами, матрица* $E+e_i^j-e_i^i+e_j^i-e_j^j$ *является произведением конечного числа элементарных матриц.*

Определение 16 *Ступенчатой будем называть матрицу у которой все нулевые строки (если они есть), стоят в конце, а номера первых ненулевых элементов строк строго возрастают.*

Ступенчатые матрицы имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a^1_{j_1} & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 & \dots\dots\dots & & 0 & a^2_{j_2} & \dots\dots\dots \\ 0 & \dots\dots\dots\dots\dots & & & 0 & a^3_{j_3} & \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & 0 & a^m_{j_m} \end{pmatrix}.$$

Теорема 9 *1. Всякую матрицу можно привести к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.*

2. Пусть $A \in \mathrm{Mat}(m, n, K)$. Тогда существуют такие $l \geqslant 0$ и элементарные матрицы $B_1, \dots, B_l \in \mathrm{Mat}(m, m, K)$, что $B_1 \dots B_l A$ — ступенчатая матрица.

Доказательство. Нулевая матрица - ступенчатая. Если матрица ненулевая, то пусть j_1 — номер первого ненулевого столбца. С помощью перестановки строк добьемся того, чтобы $a^1_{j_1} \neq 0$. Далее из каждой строки с номером $i \geqslant 2$ вычтем первую, умноженную на $\frac{a^i_{j_1}}{a^1_{j_1}}$, тем самым получив нули в j_1-м столбце во всех строках, кроме первой. Далее рассмотрим получившуюся матрицу без первой строки и проделаем те же действия. $\square$

Приведение матрицы к ступенчатому виду, изложенным выше способом, называется методом Гаусса. Для системы линейных уравнений, матрица которой ступенчатая, нетрудно написать частное решение и построить фундаментальную систему решений, тем самым описав все решения исходной линейной системы.

Отметим, что если после приведения системы к ступенчатому виду число ненулевых строк расширенной матрицы системы больше чем число ненулевых строк матрицы системы, то система не имеет решений.

1.7 Ранг оператора. Ранг матрицы.

1.7.1 Транспонирование матриц.

Определение 17 *Пусть $A \in \mathrm{Mat}(m, n, K)$. Матрица $A^T \in \mathrm{Mat}(n, m, K)$ с элементами $(A^T)^i_j := A^j_i$ называется транспонированной к A.*

Лемма 12 *1. $(A + B)^T = A^T + B^T$; $(A^T)^T = A$.*

2. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

3. *Если* $A \in \mathrm{GL}(n, K)$, *то* $A^T \in \mathrm{GL}(n, K)$ *и* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

1.7.2 Ранг

Определение 18 • *Ранг системы векторов — размерность ее линейной оболочки.*

- *Ранг линейного оператора — размерность его образа.*
- *Ранг матрицы по строкам — ранг системы ее строк.*
- *Ранг матрицы по столбцам — ранг системы ее столбцов.*

Позднее будет показано, что ранг по строкам совпадает с рангом по столбцам, и будет называться просто рангом матрицы. Пусть $\mathrm{rk}_v\, A$ обозначает ранг матрицы A по столбцам, а $\mathrm{rk}_g\, A$ — по строкам. Из определений ясно, что $\mathrm{rk}_v\, A = \mathrm{rk}_g\, A^T$.

Предложение 6 *Пусть* $a : U \longrightarrow V$ *— линейное отображение,* e, f *— базисы пространств* U *и* V *соответственно. Тогда* $\mathrm{rk}\, a = \mathrm{rk}_v\, a_e^f$.

Доказательство. По лемме 10 $\mathrm{Im}\, a = \langle a(e_1)^f, \ldots, a(e_n)^f \rangle$, откуда следует утверждение.□

На ряду с элементарными преобразованиями строк, можно, также, в некоторых целях рассматривать преобразования столбцов.

Лемма 13 1. *Пространство, порожденное строками матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях строк. Пространство, порожденное столбцами матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях столбцов.*

2. *Ранг матрицы по строкам (столбцам) не меняется при элементарном преобразовании строк (столбцов).*

3. *Умножение матрицы на обратимую справа (слева) не меняет ее ранга по столбцам (строкам).*

4. *Ранг матрицы по столбцам не меняется при элементарном преобразовании строк.*

Доказательство.

1. Пусть $A^1, \ldots, A^n$ — строки матрицы A и пусть $U_1 = \langle A^1, \ldots, A^n \rangle, U_2 = \langle A^1, \ldots, A_i + \alpha A_j, \ldots, A^n \rangle$. Достаточно показать, что $U_1 = U_2$. Заметим, что $A^i = (A^i + \alpha A^j) - \alpha A^j$. Откуда по лемме 3 $U_1 = U_2$.

2. Следует из предыдущего пункта.

3. Обратимая матрица соответствует обратимому оператору. Произведению матриц соответствует композиция операторов. Таким образом, умножение матрицы оператора слева на обратимую матрицу соответствует замене базиса в его множестве значений, а справа — в области определения. Так как столбцовый ранг матрицы не зависит от выбора базиса, то столбцовый ранг не меняется при умножении на обратимую матрицу.

   (Формально: Пусть $B \in \mathrm{GL}(n, K), A \in \mathrm{Mat}(m, n, K)$. Рассмотрим оператор $K^n \longrightarrow K^n$, матрица которого в стандартном базисе есть B. Так как матрица B обратима, то в силу леммы 10 столбцы матрицы B(обозначим их $f = (B_1, \dots, B_n)$) образуют базис пространства K^n. Матрица B тогда является матрицей тождественного оператора относительно базиса f и стандартного, т.е. $B = \mathrm{id}^e_f$. Пусть a — оператор, для которого $a^g_e = A$ где g — стандартный базис K^m. Тогда

   $$AB = a^g_e \,\mathrm{id}^e_f = a^g_f,$$

   (последнее равенство следует из теоремы 4)). Таким образом $\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}(a^g_f) = \mathrm{rk}\, a = \mathrm{rk}\, A$.

   Следующее утверждение следует из того, что строчной ранг матрицы равен столбцовому рангу транспонированной к ней, а транспонированная к обратимой — обратима.

4. Утверждение следует из предыдущего пункта.

□

Следствие 3 *Ранг матрицы равен числу ненулевых строк любой ступенчатой матрицы, к которой она приводится элементарными преобразованиями строк.*

Доказательство. Достаточно показать, что ненулевые строки ступенчатой матрицы линейно независимы, а значит образуют базис пространства строк матрицы. □

Теорема 10 *Пусть* $A \in \mathrm{Mat}(m, n, K)$, *тогда* $\mathrm{rk}_v(A) = \mathrm{rk}_g(A)$.

Доказательство.(или см. [2, гл2 §2 теорема 1]) В силу теоремы 9 и леммы 13 достаточно проверить утверждение только для ступенчатой матрицы A. Пусть $\mathrm{rk}_g(A) = r$ и $j_1, j_2, \dots, j_r$ — номера первых ненулевых элементов в строках $1, \dots, r$. Применив необходимое число раз элементарное преобразование второго типа, можно считать, что $A^i_{j_i} = 1$, $1 \leqslant i \leqslant r$ и $A^k_{j_i} = 0$ при $k < i$.

Далее тем же образом как это было проделано при приведении матрицы к ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований над строками, можно с помощью элементарных преобразований столбцов (т.е. не меняя ни строчного не столбцового ранга) привести матрицу к виду

$$e_1^1 + \ldots + e_r^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Совсем просто убедиться в том, что ранг по строкам и ранг по столбцам для последней матрицы совпадают и равны r. $\square$

Теорема 11 *(Теорема Кронекера-Капелли) Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы ее коэффициентов равен рангу расширенной матрицы.*

Доказательство. Пусть $(A|b)$ — расширенная матрица системы линейных уравнений. $\operatorname{rk} A \leqslant \operatorname{rk}(A|b)$, причем $\operatorname{rk} A < \operatorname{rk}(A|b)$ тогда и только тогда, когда у ступенчатой матрицы для расширенной матрицы системы последняя ненулевая строчка имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, что означает несовместность исходной системы.

(Совместность системы $Ax = b$ эквивалентна условию $b \in \operatorname{Im} A$, где A — оператор с матрицей A в стандартных базисах. Последнее равносильно тому, что $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A|b)$.) $\square$

Предложение 7 *Пусть* $A \in \operatorname{Mat}(n, K)$. *Тогда* A *обратима тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rk} A = n$.

Доказательство.Пусть $a : K^n \longrightarrow K^n$ линейный оператор, для которого $a(x) = Ax$, т.е. $A = a_e^e$ для стандартного базиса e. Тогда $\operatorname{rk} A = n \iff \operatorname{rk} a = n \iff \dim \operatorname{Im} a = n \iff \begin{cases} \operatorname{Im} a = K^n \\ \operatorname{Ker} a = \{0\} \end{cases} \iff a$ — обратим, что эквивалентно тому, что матрица A обратима. $\square$

1.8 Определитель матрицы. Форма объема.

1.8.1 Предисловие. Объем параллелепипеда.

(см. [2, гл.3]) Сопоставим квадратной матрице $A = (A_1, \ldots, A_n)$ параллелепипед, ребра которого задаются столбцами матрицы A.

$$\prod = \{x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n | x_i \in [0, 1]\}.$$

Ориентированный объем n-мерного параллелепипеда определяется по индукции: $V^{(n)}(A) = V^{(n-1)}(A_1, \ldots, A_{n-1}) \cdot h_{A^n}$. В качестве примера рассмотрим площадь параллелограмма. Известно, что она обладает следующими свойствами:

1. $v(\Pi(A_1, A_2)) = -v(\Pi(A_2, A_1))$;
2. $v(\Pi(A_1{+}A_3, A_2)) = v(\Pi(A_1, A_2)){+}v(\Pi(A_3, A_2))$, $v(\Pi(\lambda A_1, A_2)) = \lambda v(\Pi(A_1, A_2))$;
3. $v(\Pi(E)) = 1$.

(второе свойство следует из того, что высота параллелепипеда есть длина проекции на прямую, ортогональную соответствующей стороне, а проектирование является линейным отображением.)

1.8.2 Пространства полилинейных отображений

$\mathrm{Multi}(V_1, \ldots, V_k, Y)$, $\mathrm{Multi}_k(V, Y)$. Пространства полилинейных форм $\mathrm{Multi}(V_1, \ldots, V_k, K)$, $\mathrm{Multi}_k V$.

V — векторное пространство над полем K.

Определение 19 $f : V \times \ldots \times V \longrightarrow K$ *полилинейное отображение(m-форма), если оно линейно по каждому аргументу, т.е. для любых* $u, v \in V$ *и* $\alpha \in K$ *выполнены равенства*

$$f(\ldots, u+v, \ldots) = f(\ldots, u, \ldots) + f(\ldots, v, \ldots)$$
$$f(\ldots, \alpha v, \ldots) = \alpha f(\ldots, v, \ldots).$$

Пусть $\mathrm{Multi}_k V$ обозначает пространство k-форм $V \times \ldots \times V \longrightarrow K$.

Непосредственно из определения полилинейности следует следующая лемма.

Лемма 14 *Пусть* $e = (e_1, \ldots, e_n)$ *— базис* V, $f : V \times \ldots \times V \longrightarrow K$ *— полилинейное отображение. Тогда*

$$f(v_1, \ldots, v_m) = \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{n} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})(v_1^e)^{i_1} \ldots (v_m^e)^{i_m} =$$
$$= \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{n} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}) a_1^{i_1} \ldots a_m^{i_m},$$

где $A = (v_1^e \ldots v_m^e)$.

Утверждение леммы означает, что полилинейная форма однозначно определяется m-мерным массивом своих значений на базисных векторах.

Примеры. Важным примером полилинейных отображений, который мы будем рассматривать позднее, являются билинейные формы $B : V \times V \longrightarrow K$. Одним из примеров билинейных форм служит скалярное произведение векторов на плоскости. В общем виде билинейная форма $f : K^n \times K^n \longrightarrow K$ имеет вид $f((x^1, \ldots, x^n)^T, (y^1, \ldots, y^n)^T) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x^i y^j$.

Пространство симметричных полилинейных форм.

$$\begin{aligned} &\mathrm{SMulti}_k V = \\ &\quad = \{\omega \in \mathrm{Multi}_k V \mid \omega(v_1 \ldots, v_i \ldots, v_j, \ldots, v_k) = \omega(v_1 \ldots, v_j \ldots, v_i, \ldots, v_k)\}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что $\mathrm{SMulti}_k V$ является подпространством $\mathrm{Multi}_k V$.

Замечание 2 *Определим действие симметрической группы S_k на $\mathrm{Multi}_k V$ следующим образом:*

$$\begin{gathered} S_k \times \mathrm{Multi}_k V \longrightarrow \mathrm{Multi}_k V \\ (\sigma\omega)(v_1, \ldots, v_k) = \omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}). \end{gathered}$$

Упр. 4 *Проверьте, что это действительно действие группы на множестве.*

Замечание 3 *Пространство симмметричных полилинейных форм можно было бы определить как множество таких форм $\omega \in \mathrm{Multi}_k V$, что для всякой подстановки $u \in S_k$ выполнено $\omega(v_1 \ldots, v_k) = \omega(v_{u(1)} \ldots, v_{u(k)})$.*

Пространство антисимметричных полилин. форм.

$$\begin{aligned} \mathrm{AMulti}_k V = \{\omega \in \mathrm{Multi}_k V \mid \forall\, v_1, \ldots, v_k \in V \\ \big(\exists\, i, j \in \{1, \ldots, k\}\ (i \neq j\ \wedge\ v_i = v_j)\ \Rightarrow\ \omega(v_1, \ldots, v_k) = 0\big)\}. \end{aligned}$$

Лемма 15 *1. Для всякой антисимммметричной полилинейной формы $\omega \in \mathrm{Multi}_k V$ выполнено*

$$\omega(v_1 \ldots, v_i \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\omega(v_1 \ldots, v_j \ldots, v_i, \ldots, v_k). \tag{5}$$

2. Если $\mathrm{char}\, K \neq 2$, то из условия (5) следует антисимметричность формы.

3. Для $w \in \mathrm{Multi}_n(V)$ условие (5) эквивалентно тому, что для всех $\sigma \in S_n$ выполнено $\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(v_1, \ldots, v_k)$.

Доказательство.

1.

$$0 = \omega(\dots, v_i+v_j, \dots, v_i+v_j, \dots) = \omega(\dots, v_i, \dots, v_i, \dots)+\omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots)+$$
$$+\,\omega(\dots, v, \dots, u, \dots) + \omega(\dots, v, \dots, v, \dots) =$$
$$= \omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) + \omega(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots) \Longrightarrow$$
$$\omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = -\omega(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots).$$

2. Достаточно подставить в условие (5) $v_i = v_j$.
3. Следует из предыдущего пункта и того, что всякая перестановка является произведением транспозиций, а транспозиция является нечетной перестановкой.

$\square$

Лемма 16 *Пусть ω — полилинейное антисимметричное отображение. Тогда*

$$\omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = \omega(\dots, v_i + \alpha v_j, \dots, v_j, \dots), \quad \forall \alpha \in K.$$

1.8.3 Формы объема.

Определение 20 *Антисимметричная полилинейная n-форма на n-мерном векторном пространстве называется формой объема.*

Лемма 17 *Пусть $\omega : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n \text{ раз}} \longrightarrow K$ полилинейная антисимметричная форма, $e = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V. Тогда*

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(e_1, \dots, e_n) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)(v_1^e)^{\sigma(1)} \dots (v_n^e)^{\sigma(n)} =$$
$$= \omega(e_1, \dots, e_n) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_1^{\sigma(1)} \dots a_n^{\sigma(n)},$$

где $A = (v_1^e \dots v_n^e)$.

Доказательство. Применив лемму 14 остается только, воспользовавшись антисимметричностью формы ω.$\square$

Определение 21 • *Скаляр $\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_1^{\sigma(1)} \dots a_n^{\sigma(n)}$ назовем определителем матрицы $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$.*

Лемма 18 *(см. [1, лемма 2.2.]) Определитель матрицы является полилинейной антисимметричной формой ее столбцов, а $\det E = 1$.*

Доказательство. Полилинейность, как и равенство $\det E = 1$, легко следует из определения. Докажем антисимметричность. Пусть столбцы A_k и A_l матрицы $A = (a^i_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ совпадают. Покажем, что $\det A = 0$. Индекс знакопеременной группы $\mathcal{A}_n$ в S_n равен 2. Пусть $\tau = (kl)$, тогда $S_n = \mathcal{A}_n \cup \mathcal{A}_n\tau$.

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}\prod_{i=1}^{n} a_i^{\sigma(i)} = \sum_{\sigma\in A_n}\prod_{i=1}^{n} a_i^{\sigma(i)} - \sum_{\rho\in A_n\tau}\prod_{i=1}^{n} a_i^{\rho(i)} =$$
$$= \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_n}\prod_{i=1}^{n} a_i^{\sigma(i)} - \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_n}\prod_{i=1}^{n} a_i^{\sigma\tau(i)} = \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_n}\prod_{i=1}^{n} a_i^{\sigma(i)} - \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_n} a_k^{\sigma\tau(k)} a_l^{\sigma\tau(l)}\prod_{i\neq k,l}^{n} a_i^{\sigma(i)} =$$
$$= \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_n}\prod_{i=1}^{n} a_i^{\sigma(i)} - \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_n} a_k^{\sigma(l)} a_l^{\sigma(k)}\prod_{i\neq k,l}^{n} a_i^{\sigma(i)} = 0.$$

Последнее равенство следует из того, что $a^i_l = a^i_k$, $1 \leqslant i \leqslant n$. $\square$

Утверждение леммы означает, что определитель является формой объема на пространстве K^n.

Для каждого базиса определим форму объема, связанную с базисом: $\mathrm{vol}^e(v_1, \ldots, v_n) = \det\begin{pmatrix} v_1^e & \ldots & v_n^e \end{pmatrix}$.

Данная диаграмма служит иллюстрацией излагаемого:

$$\begin{tikzcd} V\times\ldots\times V \arrow[rr, "\alpha\mathrm{vol}^e"] \arrow[dr, "e"'] & & K \\ & K^n\times\ldots\times K^n \arrow[ur, "\alpha\det"'] & \end{tikzcd}$$

В следующей теореме перечислены простые или уже доказанные факты о формах объема.

Теорема 12 *(Теорема о формах объема.) Пусть K — поле, V — векторное пространство над полем K , $n = \dim V < \infty$ и e — базис V. Тогда*

1. *$vol^e(e_1, \ldots, e_n) = 1$ и vol^e является формой объема на V;*
2. *для любой формы объема ω на V и базиса e выполнено $\omega = \omega(e_1, \ldots, e_n)\, vol^e$. Таким образом любая форма объема пропорциональна определителю.*

   Для любого базиса $\tilde{e}$ пространства V выполнено $vol^{\tilde{e}} = \det \mathrm{c}_e^{\tilde{e}} \cdot vol^e$;
3. *Множество форм объема на данном векторном пространстве является одномерным векторным пространством.*
4. *(a) Пусть ω ненулевая форма объема на V. Тогда набор векторов $v_1, \ldots, v_n \in V$ является базисом, если и только если $\omega(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$.*

(b) *Определитель квадратной матрицы не равен нулю тогда и только тогда, когда ее строки (столбцы) линейно независимы.*

(c) *Матрица* $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ *обратима тогда и только тогда, когда ее определитель не равен нулю. Т.е.* $\mathrm{GL}(V) = \{a \in \mathrm{End}(V) | \det a \neq 0\}$.

Доказательство. Первые два утверждения уже доказаны выше. Третье утверждение следует из второго.

Докажем утверждение (4 a):$\omega \neq 0$, а значит $\exists x_1, \ldots, x_n \in V : \omega(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.

$\Longrightarrow$

Если набор векторов $v_1, \ldots, v_n \in V$ является базисом, то $\omega(x_1, \ldots, x_n) = \omega(v_1, \ldots, v_n)\mathrm{vol}^v(x_1, \ldots, x_n)$. Следовательно, $\omega(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$.

$\Longleftarrow$

Если набор векторов $v_1, \ldots, v_n \in V$ не является базимом, то один из элементов выражается в виде линейной комбинации остальных, скажем, $v_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j v_j$. Тогда по лемме 16 получаем, что $\omega(v_1, \ldots, v_n) = 0$.

Пункт (4б) уже был доказан (см. предложение 7), но подчеркнем, что он, в частности, следует из (4a), как и п. (4c). □

Замечание 4 *Из всего сказанного выше следует, что есть только одна полилинейная антисимметрическая функция* $f : \mathrm{Mat}(K, n) \longrightarrow K$ *столбцов квадратной матрицы, для которой* $f(E) = 1$, *и это определитель.*

Предложение 8 *Пусть* $a \in \mathrm{End}(V)$, ω *— форма объема на* V. *Тогда*

1. *Функция* $\omega_a : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n \text{ раз}} \longrightarrow K$, *заданная равенством* $\omega_a(x_1, \ldots, x_n) = \omega(a(x_1), \ldots, a(x_n))$ *является формой объема.*

2. *Значение выражения* $\frac{\omega(a(e_1),\ldots,a(e_n))}{\omega(e_1,\ldots,e_n)}$, *где* ω *— ненулевая форма объема, а* $e_1, \ldots, e_n$ *— базис пространства* V, *не зависит ни от формы* ω *ни от базиса.*

3. *Пусть* A *матрица оператора* a *в базисе* $e_1, \ldots, e_n$. *Тогда* $\det A = \mathrm{vol}^e(a(e_1), \ldots, a(e_n)) = \frac{\omega(a(e_1),\ldots,a(e_n))}{\omega(e_1,\ldots,e_n)}$.

Доказательство. Первое утверждение проверяется непосредственно. Перейдем ко второму. Отметим сперва, что в силу пункта 4 предыдущей теоремы $\omega(e_1, \ldots, e_n) \neq 0$.

Покажем сперва, что значение $\frac{\omega(a(e_1),\ldots,a(e_n))}{\omega(e_1,\ldots,e_n)}$ не зависит от формы ω. По теореме о формах объема, пространство форм объема одномерно, поэтому форма ω образует его базис. Это означает, что для всякой формы объема $\widetilde{\omega}$ существует $c \in K$ такой, что $\widetilde{\omega} = c\omega$. Таким образом

$$\frac{\widetilde{\omega}(a(e_1),\ldots,a(e_n))}{\widetilde{\omega}(e_1,\ldots,e_n)} = \frac{c\omega(a(e_1),\ldots,a(e_n))}{c\omega(e_1,\ldots,e_n)} = \frac{\omega(a(e_1),\ldots,a(e_n))}{\omega(e_1,\ldots,e_n)} \tag{6}$$

Осталось показать, что $\frac{\omega(a(e_1),\ldots,a(e_n))}{\omega(e_1,\ldots,e_n)}$ не зависит от выбора базиса. Пусть $\tilde{e}_1,\ldots,\tilde{e}_n$ — базис V. Снова, поскольку форма ω образует базис пространства форм объема, найдется такой $d \in K$, что $\omega_a = d\omega$, а значит

$$\frac{\omega(a(\widetilde{e}_1),\ldots,a(\widetilde{e}_n))}{\omega(\widetilde{e}_1,\ldots,\widetilde{e}_n)} = \frac{d\omega(\widetilde{e}_1,\ldots,\widetilde{e}_n)}{\omega(\widetilde{e}_1,\ldots,\widetilde{e}_n)} = d.$$

Докажем последний пункт. Первое равенство следует из определения формы vol^e, а для доказательства второго достаточно подставить $\omega = \mathrm{vol}^e$, т.к. независимость правой части от формы уже доказана.

□

Определение 22 *Определителем линейного оператора* $a \in \mathrm{End}(V)$ *назовем* $\det a = \frac{\omega(a(e_1),\ldots,a(e_n))}{\omega(e_1,\ldots,e_n)}$.

Выше было показано, что объемы всех невырожденных параллелепипедов под действием оператора изменяются одинаково. Это доказывает корректность данного определения.

Замечание 5 *Из определения следует, что определитель определитель линейного оператора* $a \in \mathrm{End}(V)$ *равен определителю его матрицы в некотором базисе, т.е.* $\det a = \det a_e^e$.

1.8.4 Свойства определителя

(см. [1, стр 42])

Предложение 9 *Пусть* $a, b \in \mathrm{End}(V), A, B \in \mathrm{Mat}(n, K)$, *тогда*

1. $\det(a \circ b) = \det a \cdot \det b$, $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.
2. $\mathrm{GL}(V) = \{a \in \mathrm{End}(V) | \det a \neq 0\}$, $\mathrm{GL}(n, K) = \{A \in \mathrm{Mat}(n, K) | \det A \neq 0\}$;
3. $\det : \mathrm{GL}(V) \longrightarrow K^*$ — *гомоморфизм мультипликативных групп.*
4. $\det : \mathrm{GL}(n, K) \longrightarrow K^*$ — *гомоморфизм мультипликативных групп.*

Доказательство.

1. Пусть e — базис пространства V. Предположим, что оператор b обратим, тогда в силу леммы 10 векторы $b(e_1), \dots, b(e_n)$ образуют базис пространства V. Тогда

$$\det(a \circ b) = \frac{\omega(a(b((e_1)), \dots, a(b(e_n)))}{\omega(e_1, \dots, e_n)} = \\ = \frac{\omega(a(b((e_1)), \dots, a(b(e_n)))\omega(b(e_1), \dots, b(e_n))}{\omega(e_1, \dots, e_n)\omega(b(e_1), \dots, b(e_n))} = \det a \cdot \det b.$$

   Пусть теперь оператор b обратим. Тогда векторы $b(e_1), \dots, b(e_n)$ линейно зависимы, а значит таковы и $a(b(e_1)), \dots, a(b(e_n))$, поэтому в силу теоремы о формах объема $\omega(b(e_1), \dots, b(e_n) = 0$ и $\omega(a(b(e_1)), \dots, a(b(e_n)) = 0$. Последнее означает, что $\det a \circ b = 0 = \det b = \det a \cdot \det b$.

   Утверждение про матрицы следует из замечания 5.

2. уже было доказано в теореме о формах объема.

   Оставшиеся пункты лишь переформулировка уже доказанного.

Отметим очевидные, но очень важные для практики свойства определителя.

Предложение 10 *(см. [1, Предложение 3.3])*

1. $\det A = \det A^T$.

2. Определитель матрицы с нулевым столбцом (строкой) равен нулю.

3. Значение определителя не меняется если одной строке(столбцу) матрицы прибавить другую, умноженную на число.

4. Определитель матрицы, в которой есть два пропорциональных столбца (строки), равен нулю.

5. $\det(A_1, \dots, \alpha A_i, \dots, A_n) = \alpha \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n)$;

Доказательство. Все утверждения являются следствием полилинейноности и антисимметричности определителя.

1.8.5 Определитель блочной матрицы

Предложение 11 *Определитель блочно-треугольной матрицы равен произведению определителей диагональных блоков. Т.е.*

$$\det \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \det B.$$

Доказательство. (см. [1, Предложение 3.4]). Пусть сначала $A = \det \begin{pmatrix} E & * \\ 0 & E \end{pmatrix}$. С помощью элементарных преобразований легко показать, что $\det A = 1$. Рассмотрим теперь n-форму ω на K^n:

$$\omega(B) = \det \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что ω — форма объема, а значит (т.к. пространство форм объема одномерно) $\omega(B) = c \det B$ для некоторого $c \in K$. Подставим $B = E$, получим уже рассмотренный случай, тогда $1 = \omega(E) = c$, а значит $c = 1$ и, таким образом, $\det \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & E \end{pmatrix} = \omega(B) = \det B$.

Зафиксируем теперь квадратную матрицу B и рассмотрим m-форму u на K^m, заданную формулой $u(C) = \det \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & C \end{pmatrix}$, где $C \in \mathrm{Mat}(m, K)$. Снова заметим, что u — форма объема, а значит $u(C) = d \det C$ для некоторого $d \in K$. Как и выше, подставив $C = E$, убедимся, что $d = \det B$, откуда следует утверждение. Общий случай(случай нескольких блоков) может быть получен по индукции. $\square$

1.8.6 Разложение определителя по столбцу (строке).

Определение 23 *Пусть $B \in \mathrm{Mat}(n, K)$ и $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Минором в позиции (i, j) матрицы B называется определитель матрицы, полученной из B вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Обозначим его $M_{ij}(B)$.*

Алгебраическим дополнением позиции (i, j) матрицы A называется $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}(B)$.

Минор матрицы M^{ij}. Алгебраическое дополнение.

Предложение 12 *Пусть $B \in \mathrm{Mat}(n, K)$. Тогда*

$$\det B = \sum_{i=1}^{n} b_i^j A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} b_j^i A_{ji}.$$

1.9 Матрицы. Часть 2.

1.9.1 Обратная матрица. Формулы Крамера.

(см.[стр.44] [1]) Обратимые матрицы.Решение систем методом Крамера.

1.9.2 Минорный ранг матрицы.

(см.[стр.45] [1])

1.9.3 Обратимые матрицы. Алгебра матриц. Матричные уравнения.

1.10 Двойственное пространство.

1.11

1.11.1 Многочлены от операторов

1.11.2 Спектр оператора и характеристический многочлен оператора

1.11.3 Собственные значения и корневые подпространства линейного оператора.

1.11.4 Жорданова форма линейного оператора.

1.12 Билинейные и квадратичные формы. Евклидовы и эрмитовы пространства.

II семестр:

2 Кольцо многочленов.

2.1 Разложение многочленов на неприводимые множители. Лемма Гаусса. Критерий Эйзенштейна

Многочлены от многих переменных: выражение симметрических многочленов через элементарные симметрические. Формальные производные многочленов и число корней, конечные разности. Интерполяционные многочлены.

Неприводимые многочлены над полями - эффективная конструкция.

2.2 Алгоритм Берлекампа разложения многочлена на множители.(2-й семестр)

Алгоритм Берлекампа разложения многочлена на множители. (уже известны: конечные поля, о простых и неприводимых элементах кольца, уже нужна линейная алгебра и размерность пр-ва решений системы линейных уравнений)

Теорема 13 *Пусть $f \in \mathbb{F}_p[x]$ — многочлен положительной степени n со старшим коэффициентом 1.*

1. *Если многочлен $h \in \mathbb{F}_p[x]$ удовлетворяет соотношению $h^p \equiv h \mod f$, то*
$$f(x) = \prod_{a \in \mathbb{F}_p} (f(x), h(x) - a).$$

2. *Пусть $f = f_1 \dots f_k$, где f_i — попарно различные неприводимые многочлены со старшим коэффициентом 1. В таком случае многочлен h удовлетворяет соотношению $h^p \equiv h \mod f$ тогда и только тогда, когда*

$h(x) \equiv a_i \mod f_i$, где $a_i \in \mathbb{F}_p$. При этом каждому набору $(a_1, \ldots, a_k)$ соответствует ровно один многочлен h, степень которого меньше степени многочлена f.

2.3

Оценка числа неприводимых многочленов над конечным полем.

2.4 Теорема Гильберта о нулях, о базисе, базисы Гребнера и их использование в компьютерной алгебре.

2.5 Многочлены от многих переменных: выражение симметрических многочленов через элементарные симметрические.

Многочлены от многих переменных

Определение 24 *Многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется симметрическим, если для любой подстановки $\sigma \in S_n$ выполняется равенство*

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Основным примером симметрических многочленов служат элементарные симметрические многочлены $\sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} x_{i_1} \cdots x_{i_k}$, где $1 \leqslant k \leqslant n$; Положим $\sigma_0 = 1$, $\sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = 0$ при $k > n$.

Элементарные симметрические многочлены можно задавать с помощью производящей функции

$$\sigma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k t^k = \Pi_{i=1}^{\infty}(1 + tx_i).$$

Если $x_1, \ldots, x_n$ — корни многочлена $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, то $\sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^k a_{n-k}$.

Теорема 14 *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — симметрический многочлен. Тогда существует единственный многочлен $g(y_1, \ldots, y_n)$, что $f(x_1, \ldots, x_n) = g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.*

3 Поля.

Конечные поля, их порядок, существование и конструкции. Поле частных. Разложение рациональных функций на простейшие. Какие-нибудь представления про расширения полей(было выше)

4 Элементы теории Галуа.

5 Алгебра кватернионов

6 Обозначения

- Для множества X $|X|$ обозначает мощность множества X.
- $\mathrm{End}(V)$ кольцо эндоморфизмов векторного пространства V.
- $\mathrm{GL}(V) = \mathrm{Aut}(V) = (\mathrm{End}(V))^*$.

Список литературы

[1] http://alexei.stepanov.spb.ru/students/temp/conspect.pdf

[2] Кострикин А.И. "Введение в алгебру". Основы алгебры: Учебник для вузов. — М.: Физматлит. 1994.— 320 с. — ISBN 5-02-014644-7.

[3] Кострикин А.И. "Введение в алгебру". Часть III. Основные структуры: Учебник для вузов.— 3-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.— 272 с. — ISBN 5-9221-0489-6.

[4] Алексеев В.Б. "теорема Абеля в задачах и решениях— М.: МЦНМО, 2001.

[5] А.Л.Городенцев. Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Часть I. "МЦ НМО 2013

[6] http://alexei.stepanov.spb.ru/students/algebra3/Berns

[7] Н.А. Вавилов "Конкретная теория групп"

[8] К. Айерленд М.Роузен "Классическое введение в современную теорию чисел"

[9] Н. Коблиц "Курс теории чисел и криптографии"Москва: Научное изд-во ТВП, 2001, x+254 с.

[10] http://www.mathblog.dk/course-linear-algebra-gilbert-strang/

[11] http://mit.spbau.ru/sewiki/index.php/%D0%90%D0

[12] http://mit.spbau.ru/sewiki/images/3/3e/02_linear_algebra.pdf

[13] http://mit.spbau.ru/sewiki/index.php/