

Практика 06.10.2017

- (1,5 балла) Прямоугольная матрица M размерами $n \times t$ называется вполне унимодулярной, если определитель любой ее квадратной подматрицы принимает значения из множества $\{0, +1, -1\}$. Доказать, что матрица инцидентности \mathbf{M}_i орграфа D является вполне унимодулярной матрицей. Что можно сказать о матрицах \mathbf{B} и \mathbf{C} , составленных из базисных векторов пространств \mathcal{B} и \mathcal{C} , а также о матрице Кирхгофа \mathbf{K} орграфа D ?
- (2 балла) Доказать, что граф G является двудольным тогда и только тогда, когда его матрица инцидентности \mathbf{M}_i является вполне унимодулярной.
- (1,5 балла) В параграфе, посвященном матричной теореме о деревьях, мы доказали следующее утверждение. Пусть S есть произвольный набор из $(n - 1)$ -го ребра орграфа D , а B_S есть подматрица базисной матрицы, столбцы которой отвечают ребрам из набора S . Определитель $\det(B_S) \neq 0$ тогда и только тогда, когда индуцированный S подграф T соответствующего D графа G представляет собой остовное дерево G . Доказать это утверждение, используя полученные в данном параграфе результаты.
- (1,5 балла) Пусть D есть связный орграф, B — базисная матрица пространства \mathcal{B} . С использованием результатов данного параграфа и предыдущего упражнения доказать, что количество $t(D)$ остовных деревьев рассчитывается по формуле

$$t(D) = \det(B \cdot B^T).$$

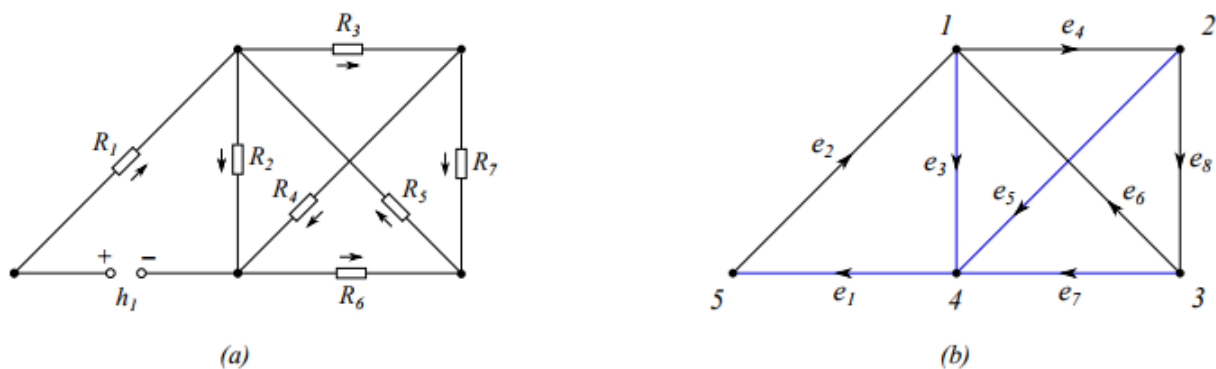


Рис. 1

- (1,5 балла) Для электрической цепи, показанной на рис.1,а, а также для соответствующего ей орграфа, показанного на рис.1,б, найти токи в цепи в случае, когда все сопротивления R_j , $j = 2, \dots, 8$, равны единице, а напряжение $h = 12$.
- (2 балла) Определить токи в орграфе, показанном на рис.2, при условии, что все сопротивления равны единице, а между вершинами x и y имеется электродвижущая сила h , величина которой равна 61. Используя этот результат, построить соответствующую полученному взвешенному орграфу D квадрангуляцию прямоугольника.
- (1 балл) Рассечение плоскости квадратами, при котором ровно один квадрат имеет сторону, равную числу Фибоначчи F_i , называется фибоначчиевым замощением плоскости. Построить подобное замощение.



Рис. 2

8. (1 балл) Совершенным кубом называется куб, разбитый на более мелкие кубики попарно различных размеров. Доказать, что совершенный куб существовать не может.