Занятие 25.04

Разминка.

1. Пусть в правой полуплоскости $\mathrm{Re}(z) > 0$ задана регулярная ветвь функции $f(z) = \sqrt[3]{z}$, удовлетворяющая условию $f(1) = 1$. Найдите аналитическое продолжение функции $f(z)$ в левую полуплоскость $\mathrm{Re}(z) < 0$ через полуось $(0, +i\infty)$ и через полуось $(0, -i\infty)$. Сравните значения полученных аналитических продолжений в точке $z = -1$.

2. Найдите все точки ветвления функции $(z - z_0)^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{C}$.

3. Пусть $f(z)$ — регулярная функция в ограниченной области D. Найдите все точки ветвления функции $\sqrt{f(z)}$.

4. Выделите регулярную ветвь функции $f(z) = \sqrt[3]{z(2-z)}$, удовлетворяющую условию $f(1) = 1$. Найти значение этой ветви функции $f(z)$ после ее аналитического продолжения вдоль верхней дуги окружности $|z - 2| = 1$ в точку $z = 3$.

5. (дз) Убедитесь в том, что функция $f(z) = \frac{z}{z-1}$ допускает выделение регулярной ветви в окрестности точки $z = \infty$. Фиксируйте ветвь условием $f(\infty) = 1$ и найти вычет этой ветви в точке $z = \infty$.

6. (дз) Можно ли выделить регулярную ветвь функции $\sqrt[4]{z}$ в области $1 < |z| < 3$?

7. (дз) Выделите регулярную ветвь функции $f(z) = \sqrt[4]{1 - z^2}$, удовлетворяющую условию $f(0) = 1$. Найдите значение этой ветви после ее аналитического продолжения вдоль ниж- ней дуги окружности $|z + 1| = 1$ в точку $z = -2$.

Задачи

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx$;

2. $\int_{\mathbb{R}} \frac{2 \sin x - \sin(2x)}{x^3} dx$;

3. $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$;

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{1 - e^x} dx$, $0 < \mathrm{Re}\,\alpha < 1$, $0 < \mathrm{Re}\,\beta < 1$;

5. (в дз) $\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha x)}{\operatorname{ch} x}$, $|\operatorname{Im} \alpha| < 1$;

6. $\frac{x^{\alpha-1} dx}{(x+1)(x+2)(x+3)dx}$, $0 < \mathrm{Re}\,\alpha < 3$.