Неподвижные точки и рекуррентные схемы

Мальковский Н. В.

Санкт-Петербургский Академический Университет

Понятие неподвижной точки

Определение

Пусть X – произвольное пространство, $f : X \to x$. Неподвижное точкой отображения f на X называется $x^* \in X$, для которого выполняется

$$f(x^*) = x^*.$$

Примеры

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, две неподвижные точки: $\{0, 1\}$.
2. $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, g дифференцируема $f(x) = x - \alpha \nabla g(x)$. Любая точка минимума g является неподвижной точкой f.
3. $\frac{d}{dx} : C^{(1)}[a, b] \to C[a, b]$ – оператор дифференцирования. Неподвижные точки – функции вида Ce^x.
4. $f : \Delta_n \to \Delta^n$, где $\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0_n,\ \mathbf{1}^T x = 1\}$ – стандартный n-мерный симплекс, $f(x) = Px$, где P – стохастическая матрица. Процесс

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

принято называть *марковским процессом*. Компонента i вектора x_k представляют собой вероятность оказаться в состоянии i на итерации k. Матрица P задает вероятность перехода. Предельное состояние процесса является неподвижной точкой f.

Сжимающее отображение

Определение

Пусть (X, δ) *– метрическое пространство. Отображение* $f : X \to X$ *называется* *сжимающим**, если существует* $q < 1$*, что* $\forall x, y \in X$ *выполняется*

$$\delta(x, y) \leq q\delta(f(x), f(y)).$$

Примеры

1. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = \alpha x + b$, $|\alpha| < 1$.
2. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$, A – симметричная вещественная матрица и$\sigma(A) < 1$ ($\sigma(A) = \max\{|\lambda| \mid \exists v \neq 0_n,\ Av = \lambda v\}$).

Теорема Банаха

Теорема (Банаха о сжимающем отображении)

Пусть (X, δ) – непустое полное метрическое пространство, $f : X \to X$ – сжимающее отображение на X с константой q, тогда

- *Существует единственная неподвижная точка $x^* \in X$ функции на f на X.*
- *При любом $x_0 \in X$ рекуррентная последовательность $x_{k+1} = f(x_k)$ сходится к x^*.*

Док-во. Для последовательности $x_{k+1} = f(x_k)$ имеет место

$$\delta(x_{k+1}, x_k) = \delta(f(x_k), f(x_{k-1}) \leq q\delta(x_k, x_{k-1}) \leq \ldots \leq q^k\delta(x_1, x_0).$$

Таким образом, для любых $n < m$

$$\delta(x_n, x_m) \leq \sum_{i=n+1}^{m} \delta(x_{i+1}, x_i) \leq q^n \sum_{i=0}^{m-n-1} q^i\delta(x_1, x_0) \leq \frac{q^n}{1-q}\delta(x_1, x_0),$$

а значит x_k – фундаментальная последовательность (последовательность Коши). Так как X полно, то x_k имеет предел в X, обозначим его за x^*.

Теорема Банаха

Так как $x_k \xrightarrow{\delta} x^*$, то

$$\delta(f(x_k), f(x^*)) \leq q\delta(x_k, x^*) \to 0,$$

т.е. $f(x_k) \xrightarrow{\delta} f(x^*)$. Переходя к пределу в рекуррентном соотношении получаем

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x^*).$$

Осталось показать единственность x^*: пусть $f(y) = y$, тогда

$$\delta(x^*, y) = \delta(f(x^*), f(y)) \leq q\delta(x^*, y) \;\Rightarrow\; \delta(x^*, y) = 0 \;\Rightarrow\; x^* = y. \quad \blacksquare$$

Замечание. Можно оценить скорость сходимости:

$$\delta(x_k, x^*) \leq \sum_{i=k}^{\infty} \delta(x_i, x_{i+1}) \leq q^k \sum_{i=0}^{\infty} q^i \delta(x_1, x_0) = \frac{q^k}{1-q}\delta(x_1, x_0)$$

Замечания

Замечание 1. Легко проверить, что для функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2}$ выполняется

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|,$$

но при этом у f нет неподвижных точек

$$f(x) - x = \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{2} \geq \frac{|x| - x}{2} \geq 0.$$

Замечание 2. Для аффинных отображений $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$ выполняется

$$||f(x) - f(y)|| = ||Ax - Ay|| \leq ||A|| \cdot ||x - y||.$$

Для симметричных матриц $||A|| = \sigma(A)$, что неверно для несимметричных матриц, однако даже для несимметричных матриц условие $\sigma(A) < 1$ гарантирует сходимость последовательности

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

Сходимость линейных рекуррентных процессов

Посмотрим подробнее на последовательность вида

$$x_{k+1} = Ax_k + b, \tag{1}$$

где $x_k, b \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Заметим для начала что для жорданова блока J_i

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots_i & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

выполняется

$$J_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & C_k^1\lambda_i^{k-1} & \dots & C_k^{n-2}\lambda_i^{k-n+2} & C_k^{n-1}\lambda_i^{k-n+1} \\ 0 & \lambda_i^k & \dots & C_k^{n-3}\lambda_i^{k-n+3} & C_k^{n-2}\lambda_i^{k-n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i^k & C_k^1\lambda_i^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i^k \end{pmatrix}$$

Сходимость линейных рекуррентных процессов

Далее, при фиксированном n, C_k^n – полином степени n от k, рост которой сколь угодно мал по сравнению с λ_i^k. Опуская некоторые технические детали, $\forall 0 < \epsilon < 1 - |\lambda_i|\ \exists C > 0 :\ \forall k$ выполняется

$$C_k^n \lambda_i^k \leq C(|\lambda_i| + \epsilon)^k$$

и аналогично для J^k: $\forall 0 < \epsilon < 1 - |\lambda_i|\ \exists C :\ \forall k$ выполняется

$$||J_i^k|| \leq C(|\lambda_i| + \epsilon)^k$$

Далее, если $A = P^{-1}JP$ – жорданова форма A, то

$$J^k = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_l \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} J_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_l^k \end{pmatrix}$$

И наконец $A^k = P^{-1}JPP^{-1}JP \dots P^{-1}JP = P^{-1}J^kP$, что наконец дает $\forall 0 < \epsilon < 1 - |\lambda_i|\ \exists C :\ \forall k\ ||A^k|| \leq C(\sigma(A) + \epsilon)^k$. $\blacksquare$

Сходимость линейных рекуррентных процессов

Теперь вернемся к последовательности (1). По аналогии с теоремой Банаха докажем существование предела в случае $\sigma(A) < 1$:

$$||x_{k+1} - x_k|| = ||Ax_k + b - Ax_{k-1} - b|| = ||A(x_k - x_{k-1})|| = \dots$$
$$= ||A^k(x_1 - x_0)|| \leq ||A^k||\,||x_1 - x_0||.$$

При $n < m$

$$||x_m - x_n|| \leq \sum_{i=n}^{m-1} ||x_{i+1} - x_i|| \leq ||A^n||\,||x_1 - x_0|| \sum_{i=0}^{m-n-1} ||A^k||$$

Из полученных результатов $\exists C_1 > 0 : \ \sum_{i=0}^{\infty} ||A^k|| < C_1$. Пусть $\epsilon = \frac{1}{2}(1 - \sigma(A))$, тогда для некоторого C_2 $\forall n$

$$||x_m - x_n|| \leq C_1 C_2 \left(\frac{\sigma(A) + 1}{2}\right)^n ||x_1 - x_0|| \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

то есть x_k – фундаментальная последовательность, а значит имеет предел, обозначим его x^*.

Сходимость линейных рекуррентных процессов

Очевидным образом
$$x^* = Ax^* + b.$$

Наконец
$$||x_k - x^*|| = ||Ax_{k-1} + b - Ax^* - b|| = \ldots = ||A^k(x_0 - x^*)|| \leq C(\sigma(A) + \epsilon)^k ||x_0 - x^*||.$$

Замечание. Если A диагонализируема, выполняется
$$||x_k - x^*|| \leq ||A||^k \, ||x_0 - x^*||.$$

Сходимость нелинейных рекуррентных процессов

Пусть теперь f – произвольная функция, x^* – неподвижная точка f, рассмотрим процесс

$$x_{k+1} = f(x_k) \tag{2}$$

Если f дифференцируема в точке x^*, то поведение (2) схоже её линейному приближению $x_{k+1} = f(x^*) + \nabla f(x^*)^T(x_k - x^*)$.

Теорема

Если f дифференцируема в точке x^*, тогда для любого $0 < \epsilon < 1 - \sigma(\nabla f(x^*))$ найдутся такие $\delta > 0$ и C, что при $||x_0 - x^*|| < \delta$ в процессе (2) выполняется

$$||x_k - x^*|| \leq C(\sigma(\nabla f(x^*)) + \epsilon)^k$$

Док-во. Обозначим $A = \nabla f(x^*)$, $\sigma = \sigma(A)$. Из дифференцируемости f в x^* существует $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\frac{\alpha(x)}{||x-x^*||} \xrightarrow{x \to x^*} 0$

$$f(x) = f(x^*) + \nabla A(x - x^*) + \alpha(x_k)$$

Сходимость нелинейных рекуррентных процессов

$$||x_k - x^*|| = ||A(x_{k-1} - x^*) + \alpha(x_{k-1})|| = \dots$$
$$\leq ||A^k||\ ||x_0 - x^*|| + \sum_{i=1}^{k} ||A^{i-1}||\ ||\alpha(x_{k-i})||$$

Из доказанного ранее $\exists C : ||A^k|| \leq C(\sigma + \epsilon)^k$. Зафиксируем некоторое $K > 0$, выберем δ так, чтобы для всех x_k $0 \leq k \leq K$ выполнялось $\alpha(x_k) \leq \frac{\sigma+\epsilon}{C(C+1)K}$.
Докажем по индукции, что в этом случае
$||x_k - x^*|| \leq (C+1)(\sigma+\epsilon)^k ||x_0 - x^*||$:

$$||x_k - x^*|| \leq ||A^k||\ ||x_0 - x^*|| + \sum_{i=1}^{k} ||A^{i-1}||\ ||\alpha(x_{k-i})||$$
$$\leq C(\sigma+\epsilon)^k ||x_0 - x^*|| + \frac{1}{(C+1)K} \sum_{i=1}^{k} (\sigma+\epsilon)^i\ ||x_{k-i} - x^*||$$
$$\leq C(\sigma+\epsilon)^k ||x_0 - x^*|| + \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{k} (\sigma+\epsilon)^k \leq (C+1)(\sigma+\epsilon)^k ||x_0 - x^*||$$

Сходимость нелинейных рекуррентных процессов

Выберем K (и вместе с ним δ) так, чтобы выполнялось $\gamma = (C+1)(\sigma+\epsilon)^K < 1$, что дает нам

$$||x_K - x^*|| \le \gamma ||x_0 - x^*|| < ||x_0 - x^*||.$$

Учитывая это можно повторить всю процедуру не изменяя выбранных констант начиная не из x_0, а из x_K, что дает для $0 \le k \le K$

$$||x_{K+k} - x^*|| \le (C+1)\gamma(\sigma+\epsilon)^k ||x_K - x^*||$$

Повторяя нужное число раз, при $k = iK + j$

$$\begin{aligned} ||x_k - x^*|| &\le (C+1)^{i+1}(\sigma+\epsilon)^k \\ &= (C+1)\left((C+1)\left(\frac{\sigma+\epsilon}{\sigma+2\epsilon}\right)^K\right)^i (\sigma+2\epsilon)^k \end{aligned}$$

Наконец выберем K и вместе с ним δ так, чтобы $(C+1)\left(\frac{\sigma+\epsilon}{\sigma+2\epsilon}\right)^K < 1$. ■

Замечания

Замечание 1. Схожие соображения используются для анализа локальной устойчивости динамических систем: если $x^* = f(x^*)$, то решение $x(t) = x^*$ системы дифференциальных

$$\dot{x} = f(x) - x$$

асимптотически устойчива если вещественные части всех собственных чисел матрицы $\nabla f(x^*) - I$ строго отрицательны. Систему (2) можно рассматривать как дискретизацию этой:

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad \Rightarrow \quad x_{k+1} - x_k = f(x_k) - x_k$$

Квадратичная сходимость рекуррентных процессов

Теорема

Пусть $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x^* = f(x^*)$, f *дифференцируема на* $S = \{||x - x^*|| \le ||x_0 - x^*||\}$, ∇f *удовлетворяет условию Липшица с константой* L, $\nabla f(x^*) = 0$ *и* $q = \frac{L}{2}||x_0 - x^*|| < 1$, *то*

$$||x_k - x^*|| \le \frac{2}{L} q^{2^k}$$

Док-во.

$$||x_1 - x^*|| = ||f(x_0) - f(x^*)|| = ||f(x_0) - f(x^*) - \nabla f(x^*)^T (x_0 - x^*)|| \le \frac{L}{2}||x_0 - x^*||^2$$

В частности $||x_1 - x^*|| \le q||x_0 - x^*||$, т.е. $x_1 \in S$, что позволяет повторить оценку для $x_2, \ldots$

$$\begin{aligned} ||x_k - x^*|| &\le \frac{L}{2}||x_{k-1} - x^*||^2 \\ &\le \left(\frac{L}{2}\right)^{2^k - 1} ||x_0 - x^*||^{2^k} = \frac{2}{L} q^{2^k} \quad \blacksquare \end{aligned}$$