Домашнее задание №4

Группа 202

Количество баллов на зачёт: **9** до *4.05*, **10** до *11.05*.

1. (1,5) Доказать, что D_n есть ближайшее к $n!\,e^{-1}$ целое число при $n \geqslant 1$.
2. (1) Определить количество способов размещения n различимых для нас гостей по трем различным же столам при условии, что за первым столом должен сидеть хотя бы один гость, за вторым столом должно сидеть только нечетное, а за третьим — четное число гостей.
3. (1) Подсчитать количество различных целочисленных решений уравнения
$$a+b+c=6, \qquad -1 \leqslant a \leqslant 2, \quad 1 \leqslant b, c \leqslant 4.$$
4. (1,5) Мы знаем, что при фиксированном параметре n производящая функция для чисел $\binom{n}{k}$ равна $(1+z)^n$. Чему равна обыкновенная производящая функция для этих чисел $\binom{n}{k}$ в случае, если мы вместо n зафиксируем параметр k? Можно ли записать для этих чисел экспоненциальную производящую функцию при фиксированном параметре k?
5. (1) Сколькими способами можно получить сумму n очков при k-кратном бросании игральной кости?
6. (1,5) Описанную в предыдущем упражнении задачу можно обобщить следующим образом. Имеется мешок, в котором имеется m жетонов, занумерованных числами от 0 до $m-1$. Из мешка вытаскивают очередной жетон, записывают его номер, а затем возвращают жетон обратно в мешок. В результате получается последовательность из k чисел. Требуется узнать, сколько из получающихся таким образом различных числовых последовательностей имеют сумму, равную n. Указанное количество обозначим через $\binom{k,m}{n}$. Доказать, что эти числа рассчитываются по формуле
$$\binom{k,m}{n} = \sum_{i:\, im \leqslant n} (-1)^i \binom{k}{i} \binom{k+n-im-1}{k-1}.$$
7. (2) Автобусный билет с шестизначным номером считался когда-то счастливым в случае, если сумма первых трех его цифр совпадала с суммой последних трех цифр. Подсчитать количество счастливых билетов.
8. (2) Имеются четыре одинаковые колоды, каждая из которых содержит 52 карты. Мы выбираем из этих колод пять карт, не нумеруя их. Сколько существует различных выборок, состоящих из пяти карт? Получить ответ как с помощью производящих функций, так и с помощью прямых комбинаторных рассуждений.
9. (2) Записать функциональное уравнение для производящей функции, описывающей количество путей Моцкина (аналогично уравнению на ОПФ чисел Каталана), и дать его комбинаторную интерпретацию с использованием комбинаторного смысла сложения и умножения обыкновенных производящих функций.
10. (1,5) Рассмотрим окружность, на которой равномерно расставлено n точек. Часть из этих точек соединены между собой хордами так, чтобы ни одна пара хорд не пересекалась между собой. Выписать производящую функцию $f(z)$, описывающую количество способов провести непересекающиеся хорды между n точками на окружности.