

1. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Какое максимальное и минимальное значение может принимать  $x^T Ax$  при  $\|x\| = 1$ ?
- (b) При каком  $a$  разница между этими значениями минимально? При каком  $a$  отношение этих величин минимально?
- (c) При каком  $a$  минимальное значение максимально? При каком  $a$  максимальное значение минимально?

2. Дан набор точек на плоскости:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ y & 3 & 0 & -1 & 2 \end{array}$$

- (a) Найти дифференцируемую функцию  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , график которой проходит по этим точкам
- (b) Найти квадратичную функцию  $g$  такую, что величина  $\sum_{k=1}^4 |g(x_k) - y_k|^2$  минимальна.
- (c) Найти квадратичную функцию  $h$  такую, что выражение

$$\int_0^3 (f(x) - h(x))^2 dx$$

минимально, где  $f$  – найденная к пункту (a) функция.

3. Найти многочлен  $P(x)$  степени  $n$  со старшим коэффициентом 1, для которого величина

$$\int_{-1}^1 P(x)^2 dx$$

минимальна.

4. Минимизировать  $xyz$  при условии  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

5. Найти прямоугольный треугольник наибольшей площади при условии, что сумма длин катетов равна единице.