Домашнее задание на 26.05

Задач на зачет: **6**.

1. Семестровый курс состоит из n занятий. Преподаватель хочет разделить курс на три последовательных части, и в каждой из них разбить занятия на лекции и практики, причём так, чтобы число практик было в первой части произвольное, во второй — нечётное, а в третьей — чётное. Сколько существует способов совершить эти действия?

2. Построить производящую функцию для числа битовых строк длины n, в которых между любыми двумя единицами стоит по меньшей мере два нуля, при помощи рекуррентных соотношений и при помощи операций (сложение/произведение/композиция) с производящими функциями.

3. Доказать, что количество разбиений n на слагаемые, каждое из которых повторяется не более трёх раз, совпадает с количеством разбиений n, в которых повторяться могут только нечётные слагаемые.

4. С использованием диаграмм Ферре показать, что количество разбиений числа n ровно на k частей равно количеству разбиений числа $n + k(k-1)/2$ ровно на k неравных частей.1

5. Доказать, что $p^2(n) < p(n^2 + 2n)$ при $n \geq 1$.

6. С использованием производящих функций доказать, что $p_3(n) = \{n^2/12\}$, где $\{k\}$ — ближайшее целое к числу k.

7. Показать из комбинаторных соображений, что при фиксированном k и $n \to \infty$
$$p_k(n) \sim \frac{n^{k-1}}{k!\,(k-1)!}.$$

8. Пусть $A(z)$ есть экспоненциальная производящая функция, описывающая количество корневых деревьев, $S(z)$ — экспоненциальная производящая функция, соответствующая перестановкам множества $[n]$, а $E(z)$ — экспоненциальная производящая функция, коэффициенты которой подсчитывают количество всех отображений множества $[n]$ в себя. Докажите, что эти производящие функции связаны соотношением
$$E(z) = S(A(z)),$$
дав комбинаторную интерпретацию данного равенства. Подсказка: визуализируйте отображение множества $[n]$ в себя.

9. Используя комбинаторный смысл экспоненциальной формулы, подсчитайте количество (связных) эйлеровых графов. Для этого вам понадобится рекуррентное соотношение $a_{n+1} = \frac{1}{c_0}\left(c_{n+1} - \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}c_i a_{n+1-i}\right)$, где производящие функции $F(z)$ и $H(z)$ для a и c соответственно удовлетворяют $H(z) = \exp(F(z))$

10. С точки зрения алгоритма сортировки, использующего только сравнение элементов (сравнение возвращает “меньше”, “больше” или “равно”), возможно построить $n!$ различных упорядоченных массивов длины n без повторяющихся элементов. Количество таких массивов в случае, когда элементы могут повторяться, строго больше $n!$. Например, для $n = 2$ имеются три различных массива
$$x_1 < x_2, \qquad x_1 > x_2, \qquad x_1 = x_2,$$
а для числа $n = 3$ таких массивов уже тринадцать. Построить производящую функцию $H(z)$, описывающую количество таких массивов.