

# ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ СПИСОК ВОПРОСОВ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ АУ, первый семестр, осень 2014 года

## ГЛАВА I. ВВЕДЕНИЕ

1. Множества: упорядоченная пара, декартово произведение, операции над множествами. Правила де Моргана.
2. Отношения: область определения, область значений, обратное отношение, композиция отношений, свойства, примеры.
3. Аксиомы вещественных чисел. Принцип Архимеда. Следствия.
4. Супремум и инфимум. Определение и теорема существования. Характеристика супремума.
5. Теорема о вложенных отрезках. Существенность условий.

## ГЛАВА II. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

6. Метрические пространства и подпространства. Примеры. Шары в метрических пространствах.
7. Неравенства Коши–Буняковского и Минковского.
8. Открытые множества: определение и свойства.
9. Внутренние точки и внутренность множества.
10. Замкнутые множества. Замыкание множества.
11. Открытые и замкнутые множества в пространстве и в подпространстве.
12. Предельные точки. Связь с замыканием множества.
13. Супремум и инфимум замкнутых множеств.
14. Предел последовательности в метрическом пространстве. Определение и основные свойства.
15. Предельный переход в неравенствах.
16. Теорема о двух милиционерах. Следствия.
17. Предел монотонной последовательности.
18. Конечномерное векторное пространство. Скалярное произведение и норма.
19. Арифметические свойства пределов последовательности.
20. Покоординатная сходимость.
21. Бесконечные пределы. Арифметические действия в  $\overline{\mathbb{R}}$ .
22. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими.
23. Покрытия. Компактность. Компактность в пространстве и в подпространстве.
24. Простейшие свойства компактных множеств.
25. Теорема о пересечении семейства компактов. Следствие.
26. Теорема о вложенных параллелепипедах.
27. Теорема Гейне–Бореля.
28. Подпоследовательности.
29. Секвенциальная компактность. Теорема о характеристике компактов в  $\mathbb{R}^m$ .
30. Теорема Больцано–Вейерштрасса и другие следствия.
31. Диаметр множества: определение и свойство.
32. Фундаментальные последовательности. Полнота.
33. Полнота  $\mathbb{R}^m$ . Полнота компактных метрических пространств.
34. Верхний и нижний пределы. Частичные пределы. Связь между ними.
35. Характеристика верхних и нижних пределов с помощью  $N$  и  $\varepsilon$ .
36. Неравенство Бернулли.
37. Определение числа  $e$ .
38. Сравнение скорости возрастания последовательностей  $n^k$ ,  $a^n$ ,  $n!$  и  $n^n$ .
39. Теорема Штольца (для неопределенности  $\frac{0}{0}$ ).
40. Теорема Штольца (для неопределенности  $\frac{\infty}{\infty}$ ).

## ГЛАВА III. ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОТОБРАЖЕНИЙ

41. Определения предела отображений и функций в точке.
42. Равносильность определения предела по Коши и по Гейне.
43. Свойства функций, имеющих предел.
44. Арифметические действия с пределами.
45. Теорема о предельном переходе в неравенствах. Теорема о двух милиционерах.
46. Левый и правый пределы. Предел монотонной функции.

47. Критерий Коши для отображений и для функций.
48. Непрерывные отображения. Определения по Коши и по Гейне. Непрерывность слева и справа.
49. Арифметические действия с непрерывными функциями. Теорема о стабилизации знака. Теорема о непрерывности композиции.
50. Характеристика непрерывности в терминах прообразов.
51. Непрерывность отображений из метрического пространства в  $\mathbb{R}^m$ .
52. Непрерывный образ компакта. Теорема Вейерштрасса и другие следствия.
53. Теоремы о непрерывности обратного отображения и о непрерывности монотонной функции.
54. Равномерная непрерывность функции. Теорема Кантора.
55. Лемма о связности отрезка. Теорема Больцано–Коши. Следствия.
56. Непрерывность тригонометрических и обратных тригонометрических функций. Предел  $\lim \frac{\sin x}{x}$ .
57. Определение степенной функции и ее свойства.
58. Определение и непрерывность логарифма. Пределы  $\lim (1 + \frac{1}{x})^x$  и  $\lim (1+x)^{1/x}$ .
59. Пределы  $\lim \frac{\ln(1+x)}{x}$ ,  $\lim \frac{(1+x)^p - 1}{x}$  и  $\lim \frac{a^x - 1}{x}$ .
60. Сравнение функций: отношение эквивалентности, символы Ландау, свойства, примеры.

#### ГЛАВА IV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

61. Определение производной и дифференцируемости функции в точке.
62. Геометрический и физический смысл производной.
63. Левая и правая производные. Бесконечные производные. Примеры.
64. Непрерывность дифференцируемой функции.
65. Арифметические действия с дифференцируемыми функциями.
66. Теорема о дифференцируемости композиции.
67. Теорема о дифференцируемости обратной функции.
68. Производные элементарных функций.
69. Теоремы Ферма и Ролля.
70. Теорема Лагранжа и Коши.
71. Следствия теоремы Лагранжа. Характеристика монотонности дифференцируемых функций.
72. Теорема Дарбу.
73. Правило Лопиталя (для  $\frac{0}{0}$  и  $\frac{\infty}{\infty}$ ). Примеры.
74. Определение производной  $n$ -го порядка. Классы  $C^n(E)$ . Несовпадение классов  $C^n(E)$ .
75. Арифметические свойства производных  $n$ -го порядка. Производные  $n$ -го порядка элементарных функций.
76. Формула Тейлора для многочленов.
77. Формулы Тейлора с остатком в форме Пеано.
78. Формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа.
79. Формулы Тейлора для  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $(1+x)^p$ .
80. Следствия формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа. Разложения  $\sin x$ ,  $\cos x$  и  $e^x$  в ряд.
81. Иррациональность числа  $e$ .
82. Локальные максимумы и минимумы. Необходимое условие экстремума.
83. Достаточные условия экстремума для дифференцируемых функций.
84. Выпуклые и вогнутые функции. Переформулировки определения выпуклости. Лемма о трех хордах.
85. Непрерывность и дифференцируемость выпуклой функции. Характеристика выпуклых функций с помощью касательных.
86. Критерии выпуклости в терминах первой и второй производных.
87. Неравенство Йенсена.
88. Неравенство о средних. Неравенства Гёльдера и Минковского.

#### ГЛАВА V. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

89. Определение первообразной и неопределенного интеграла. Общий вид первообразной. Примеры функций не имеющих первообразную.
90. Таблица интегралов. Линейность интеграла.
91. Теоремы о замене переменной в неопределенном интеграле.
92. Формула интегрирования по частям.