Краткий экскурс по линейной алгебре

Мальковский Н. В.

Санкт-Петербургский Академический Университет

Определение

Линейным (векторным) пространством над полем K называется некоторое множество V с двумя операциями: сложением "$+$" $: V \times V \to V$ и умножением на скаляр "$\cdot$" $: K \times V \to V$, удовлетворяющие следующим свойствам:

Ассоциативность	$x + (y + z) = (x + y) + z, \forall x, y, z \in V$
Коммутативность	$x + y = y + x, \forall x, y \in V$
Нулевой вектор	$\exists 0_V \in V: \; x = x + 0_V = 0_V + x, \; \forall x \in V$
Обратный элемент	$\forall x \in V \; \exists "-x" \in V: \; x + "-x" = 0_V$
Совместимость	$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \; \forall \alpha, \beta \in K, \; x \in V$
Унитарность	*Если* $1_k \in K$ *– единица поля* K*, то* $1_K \cdot x = x, \; \forall x \in V$.
Дистрибутивность	$\forall \alpha, \beta \in K, \; x, y \in V$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

Линейные пространства

линейной комбинацией векторов $x_1, \dots, x_n$ в пространстве V над K называется вектор v, для которого выполняется

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,$$

где $\alpha_i \in K$, таким образом $v \in V$. Если при этом $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 > 0$, то такая комбинация называется нетривиальной

Множество всех линейных комбинаций векторов $x_1, \dots, x_n$ принято обозначать $\mathrm{Span}\{x_1, \dots, x_n\}$, $\mathrm{Lin}\{x_1, \dots, x_n\}$ или $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ и называть линейной оболочкой.

Векторы $x_1, \dots, x_n$ называются линейно независимыми, если любая их нетривиальная линейная комбинация отлична от нулевого элемента V.

Размерностью пространства V называется максимальное натуральное число n такое, что существуют n линейно независимых векторов. Если такого n не существует, то V имеет размерность ∞.

Линейные пространства

Базисом пространства V называется любой набор линейно независимых векторов такой, что линейная оболочка этого набора совпадает с V.
Замечание. Если пространство конечномерное, то размер базиса всегда равен размерности пространства.

Если $b_1, \ldots, b_n$ – некоторый базис V, то любой вектор $x \in V$ представляется единственным образом в виде линейной комбинации векторов базиса (единственность: если есть два различных представления, то их разность – нетривиальная нулевая линейная комбинация векторов базиса)

$$v = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n.$$

Таким образом, любому вектору можно однозначно сопоставить запись $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – стандартный способ записи векторов для простых пространств.

Пространство K^n

Одно из наиболее стандартных линейных пространств K^n над K – это множество упорядоченных кортежей (один кортеж состоит из n элементов поля K) с покоординатными операциями:

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K \Rightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$$
$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$$
$$\beta \cdot (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\beta\alpha_1, \ldots, \beta\alpha_n)$$

Векторы

$$\begin{gathered}(1, 0, \ldots, 0, 0),\\ (0, 1, \ldots, 0, 0),\\ \vdots\\ (0, 0, \ldots, 1, 0),\\ (0, 0, \ldots, 0, 1)\end{gathered}$$

образуют естественный базис K^n, эти вектора принято обозначать $e_n^1, e_n^2 \ldots, e_n^n$ соответственно.

Прочие примеры

- Пространство многочленов одной или нескольких переменных над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, бесконечная размерность. Линейная оболочка $1, x, x^2$ – множество всех многочленов степени не больше 2.
- $C([a, b])$ – множество непрерывных функций из $[a, b]$ в $\mathbb{R}$, бесконечная размерность.
- Множество операторов над функциями: элементы множества – функции вида $g : ([a, b]) \to C([a, b])$. Наиболее часто используемые – операторы дифференцирования и интегрирования

$$\frac{d}{dx}, \quad \int_a^x$$

Матрицы

Матрицей размером $n \times m$ над полем K называется

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

где $a_{ij} \in K$. Множество всех матриц размера $n \times m$ будем обозначать как $K^{n \times m}$

Матрицы образуют линейное пространства над K:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \dots & \alpha a_{nm} \end{pmatrix}$$

Матричное умножение

Пусть $A = (a_{ij}) \in K^{n \times m}$, $B = (b_{ij}) \in K^{m \times q}$, тогда произведением матриц A и B называется следующая матрица $C = (c_{ij}) \in K^{n \times q}$, которая задается соотношениями

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}$$

В случае, если одна из размерностей матрицы равна единице, то определение матрицы идентично определению вектора. Матрицу из $K^{1 \times n}$ принято называть вектор-строкой, а матрицу из $K^{n \times 1}$ принято называть вектор-столбцом. Элементы K^n обычно отождествляются с соответствующими вектор-столбцами.

Важно отметить, что матричное умножение ассоциативно ($A(BC) = (AB)C$), дистрибутивно ($A(B + C) = AB + AC$), но не коммутативно ($AB \neq BA$).

Транспонирование матриц

Пусть $A = (a_{ij}) \in K^{n \times m}$, <u>транспонированной</u> матрицей A называется матрица $B = (b_{ij}) \in K^{m \times n}$, которая задается соотношениями

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

Такую матрицу принять обозначать A^T.

Матрица $A \in K^{n \times n}$ называется <u>симметричной</u> если выполняется

$$A = A^T$$

Основные свойства:

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$
$$(AB)^T = B^T A^T$$
$$(A^T)^T = A$$

Диагональная и тождественная матрицы

Существуют *единичные* или *тождественные* матрицы $I_n \in K^{n\times n}$ (или просто I, если размер очевиден из контекста) такие, что для любой матрицы $A \in K^{n\times m}$ выполняется $A = I_nA = AI_m$:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица – обозначается $\mathrm{diag}\{d_1, d_2 \dots, d_n\}$ и имеет вид

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

Скалярное произведение

Определение

Пусть V – линейное пространство над $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Скалярным произведением на V называется функция $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$(или $\mathbb{C}$), обладающей следующими свойствами

1. *Симметричность*
$$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}, x, y \in V,$$
где $\overline{y}$ – комплексное сопряжение y.
2. *Линейность*
$$\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle,\ \ x, y \in V,$$
$$\langle \alpha x + z, y\rangle = \alpha\langle x + z, y\rangle,\ \ x \in V,\ \ \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}).$$
3. *Положительная определенность, $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$ и*
$$\langle x, x\rangle \in \mathbb{R} \geq 0$$
$$\langle x, x\rangle \in \mathbb{R} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Стандартное скалярное произведение и ортогональность

Для $\mathbb{R}^n$ стандартным скалярным произведением является следующая функция

$$\langle u, v \rangle = u^T v = v^T u = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Для $\mathbb{C}^n$ вместо обычного транспонирования используется эрмитово транспонирование:

$$\langle u, v \rangle = v^\dagger u = \overline{u^\dagger v} = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i}$$

Два вектора u, v называются ортогональными относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$ если

$$\langle u, v \rangle = 0$$

Ортогонализация Грамма-Шмидта

Следующую процедуру принято называть
ортогонализацией Грамма-Шмидта:

Входные данные Семейство линейно независимых векторов $x_1, \dots, x_n$.

Выходные данные Семейство ортогональных векторов $y_1, \dots, y_n$ таких, что
$$\mathrm{Span}\{x_1, \dots, x_n\} = \mathrm{Span}\{y_1, \dots, y_n\}.$$

Итерация $k = 1..n$
$$y_k \leftarrow x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle x_k, y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle} y_i$$

Ортогональность: Индукция, при $k = 1$ очевидным образом семейство $y_1, \dots, y_k$ состоит из ортогональных векторов. Пусть $y_1, \dots, y_{k-1}$ – ортогональны, тогда при $i < k$

$$\langle y_k, y_i\rangle = \langle x_k, y_i\rangle - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle x_k, y_j\rangle}{\langle y_j, y_j\rangle} \underbrace{\langle y_j, y_i\rangle}_{i \neq j \Rightarrow =0} = \langle x_k, y_i\rangle - \frac{\langle x_k, y_i\rangle}{\langle y_i, y_i\rangle}\langle y_i, y_i\rangle = 0$$

Ортогонализация Грамма-Шмидта

Равенство линейных оболочек: докажем по индукции, что $\mathrm{Span}\{x_1, \ldots, x_k\} = \mathrm{Span}\{y_1, \ldots, y_k\}$. Очевидно, это выполняется при $k = 1$. По построению

$$x_k = y_k + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle x_k, y_i \rangle}{\langle y_i, y_i \rangle} y_i,$$

а значит $\mathrm{Span}\{x_1, \ldots, x_k\} \subset \mathrm{Span}\{y_1, \ldots, y_k\}$. Далее, покажем по индукции обратное вложение: из индукционного предположения $(\mathrm{Span}\{x_1, \ldots, x_{k-1}\} = \mathrm{Span}\{y_1, \ldots, y_{k-1}\})$ существуют $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle x_k, y_i \rangle}{\langle y_i, y_i \rangle} y_i = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i.$$

Таким образом

$$y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i,$$

что дает $\mathrm{Span}\{x_1, \ldots, x_k\} \supset \mathrm{Span}\{y_1, \ldots, y_k\}$

Определитель и обратимость матриц

Пусть $A = (a_{ij})$ – $n \times n$ матрица над K, величина

$$\det A = |A| := \sum_{p \in S_n} (-1)^{Inv(p)} a_{ip_i} \in K$$

называется <u>определителем</u> (или детерминантом) матрицы A. Основные свойства:

1. Пусть $A = (A_1, \ldots, A_n)$, A_i столбцы матрицы A. Определитель не меняется при замене одного столбца следующим образом
$$A_i \to A_i + \alpha A_j.$$
2. $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ Существует матрица B такая, что $AB = BA = I$. В этом случае говорят, что матрица A <u>обратима</u>, а B – <u>обратная к</u> A и обозначается A^{-1}.
3. Прочие свойства
$$\det A = \det A^T$$
$$\det AB = \det A \cdot \det B$$
$$\det I = 1 = \det AA^{-1} = \det A \cdot \det A^{-1}$$

Матричная запись СЛАУ

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{cases}$$

Пусть $A = (a_{ij}) \in K^{n\times m}$, $x = (x_1, \dots, x_m) \in K^m$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in K^n$. Слева в системе записаны координаты вектора Ax, справа – вектора b, таким образом систему можно компактно записать в виде

$$Ax = b,$$

что обычно называют матричной формой записи СЛАУ.

Если $n = m$, а матрица A обратима, то решение системы всегда единственно и задается

$$x = A^{-1}b$$

Линейные функции

Пусть V, W – линейные пространства над K, функция $f : V \to W$ называется <u>линейной</u>, если

$$f(\alpha x) = \alpha f(x), \ \forall x \in V, \alpha \in K$$
$$f(x + y) = f(x) + f(y), \ \forall x, y \in V$$

Пусть $A \in K^{m \times n}$, $f : K^n \to K^m$:

$$f(x) = Ax,$$

то f – линейна.
Оказывается, любая линейная функция имеет такое представление

Теорема

Пусть $f : K^n \to K^m$ – линейная функция, тогда существует $A \in K^{m \times n}$ такая, что

$$f(x) = Ax$$

Матричное представление линейной функции

Док-во. Рассмотрим стандартный базис $K^n : e_n^1, e_n^2, \ldots, e_n^n$. Из свойств линейности f однозначно задается значениями $f(e_n^1), \ldots, f(e_n^n)$: для любого вектора $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ имеет место соотношение $x = \sum_{i=1}^n x_i e_n^i$. В силу линейности f получаем

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_n^i)$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что в качестве матрицы A нужно взять матрицу, столбцы которой составлены из $f(e_n^i)$:

$$\sum_{i=1}^n x_i f(e_n^i) = x_1 \begin{bmatrix} f_1(e_n^1) \\ \vdots \\ f_m(e_n^1) \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} f_1(e_n^n) \\ \vdots \\ f_m(e_n^n) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(e_n^1) & \ldots & f_1(e_n^n) \\ \vdots, & \ddots & \vdots \\ f_m(e_n^1) & \ldots & f_m(e_n^n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Изоморфность линейных пространств

Линейные пространства V, W называются изоморфными, если существует биективная линейная функция $f : V \to W$.

Неформально это означает, что все свойства линейных функций над V есть и у линейных функций над W.

Теорема

Любое конечномерное пространство V размерностью n над K изоморфно K^n

Док-во. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ – базис V, A_v – матрица, составленная из столбцов $v_1, \ldots, v_n$. Рассмотрим линейную функцию $f : K^n \to V$:

$$f(e_n^i) = v_i.$$

Остальные значения f однозначно определяются:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i = A_v x$$

Изоморфность линейных пространств

Пусть для некоторых x, y $f(x) = f(y)$, т.е. $A_v x = A_v y \Leftrightarrow A_v(x - y) = 0$, т.е. линейная комбинация v_i с коэффициентами $x_i - y_i$ равно нулю. Из определения базиса следует, что это возможно только если $x_i - y_i = 0$, т.е. $x = y$, а значит f инъективно.

Проверим сюрьектвиность. Пусть $z \in V$ имеет следующее разложение по базису v:

$$z = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i.$$

Тогда по определению f при $x = (x_1, \ldots, x_n)$ $f(x) = z$. $\blacksquare$

Некоторые замечания

Замечание 1. Вектор-строку размера $1 \times n$ можно умножать слева на матрицу размера $n \times m$, а вектор-столбец размера $1 \times n$ можно умножать справа на матрицу размера $m \times n$. Обычно если имеет место одно умножение матрицы на вектор, то матрица ставится слева, поэтому принято, что по умолчания все вектора – это вектор-столбцы.

Замечание 2. При описании векторов зачастую используется обозначение $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Иначе говоря буква вектора с нижним индексом – компонента вектора. Если нет необходимости непосредственной работы с индексами вектора, то нижний индекс может использоваться в других целях (номер в последовательности и т.п.)

Собственные числа

Пусть $A \in K^{n\times n}$ матрица. Число λ называется собственных числом матрицы A, если для некоторого $v \neq 0$ выполняется

$$Av = \lambda v.$$

Вектор v в этом случае называется собственным вектором.

Для диагональной матрицы $\mathrm{diag}\{d_1, \ldots, d_n\}$ собственные числа – $d_1, \ldots, d_n$, которым соответствуют собственные вектора $e_n^1, \ldots, e_n^n$.

Характеристический многочлен

Если система
$$Ax = 0$$
имеет нетривиальное ($x \neq 0$) решение, то $Ax = b$ либо не имеет решений, либо имеет сразу несколько ($Ax = 0,\ Ay = b \Rightarrow A(y + \alpha x) = b$). Таким образом, если существует нетривиальное решение $Ax = 0$, то $\det A = 0$. Оказывается, что обратное также верно, т.е. если $\det A = 0$, то существует нетривиальное решение $Ax = 0$.

Если λ – с.ч. матрицы A, а v – соответствующий с.в., то
$$Av = \lambda v \Leftrightarrow 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda I v = (A - \lambda I)v \Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0.$$

Величина $\det(A - \lambda I)$ – многочлен степени n по λ, который принято называть <u>характеристическим</u> многочленом и обозначается $\chi_A(t)$. Его корни – собственные числа A. Заметим, что для любой обратимой матрицы P
$$\chi_A(t) = \det(A - tI) = \det P \det(A - tI) \det P^{-1} = \det(PAP^{-1} - tI) = \chi_{PAP^{-1}}(t)$$

Собственное подпространство

Заметим, что собственные вектора, соответствующие одному и тому же собственному числу образуют линейное пространство:

$$A(v+u) = Av + Au = \lambda v + \lambda u = \lambda(v+u)$$
$$A(\alpha v) = \alpha A v = \alpha\lambda v = \lambda(\alpha v)$$

Это подпространство принято называть <u>собственным подпространством</u> V, соответствующим с.ч. λ матрицы A.
Если $Av = \lambda v$, $A^T u = \mu u$, то

$$u^T A v = u^T(\lambda v) = \qquad \lambda u^T v$$
$$u^T A v = (\mu u^T) v = \qquad \mu u^T v$$

Таким образом, если $\mu \neq \lambda$, то векторы u, v ортогональны.

Диагонализируемые матрицы

Матрица A называется диагонализируемой если существует такая обратимая матрица P, что матрица $D = P^{-1}AP$ диагональна.

То же самое, но с другой стороны: A представляется в виде $A = PDP^{-1}$, где D – диагональная матрица.

Если такое представление существует, то D из собственных чисел A:

$$d_i e_n^i = De_n^i = P^{-1}APe_n^i \;\Rightarrow\; d_i(Pe_n^i) = A(Pe_n^i)$$

Геометрический смысл: в случае возможности диагонализации из собственных векторов A можно составить базис K^n. Столбцы матрицы P в этом случае составлены из этого базиса, обозначим их $v_1, \dots, v_n$, а соответствующие им собственные числа – $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Преобразование $x \to Ax$ растягивает x на λ_1 по направлению v_1, λ_2 по направлению v_2, $\dots$ λ_n по направлению v_n.

Вещественные симметричные матрицы

Для любой вещественной симметричной матрицы A выполняется
1) A имеет только вещественные собственные числа: пусть $Av = \lambda v$, $v \neq 0$, $\overline{a}$ – комплексное сопряжение a (для матриц и векторов – покомпонентное), тогда

$$\overline{v}^T A v = \overline{v}^T (\lambda v) = \lambda \overline{v}^T v$$

По свойствам комплексного сопряжения $\overline{\lambda}\overline{v} = \overline{A}\overline{v} = A\overline{v}$. Из симметричности A: $\overline{\lambda}\overline{v}^T = (A\overline{v})^T = \overline{v}^T A^T = \overline{v}^T A$. Таким образом

$$\overline{v} A v = \overline{\lambda}\overline{v}^T v.$$

Итого: $(\lambda - \overline{\lambda})\overline{v}^T v = 0$. Так как $v \neq 0$, по свойствам комплексного сопряжения $\overline{v}^T v > 0$, а значит $\overline{\lambda} = \lambda$.

Замечание. Так как все с.ч. вещественны, то

$$\chi_A(t) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - t)$$

2) Если с.ч. λ имеет кратность k (кратность в качестве корня характеристического многочлена), то всегда найдутся k линейно независимых собственных векторов $v_1, \dots, v_k:\ Av_i = \lambda_i$: пусть $\chi_A(t) = (\lambda - t)^k P(t)$, $Av = \lambda v$, $v^T v = 1$. Вектор v может быть дополнен до ортогонального базиса $v, y_2, \dots, y_n$, обозначим

$$Y = [y_2\ y_3\ \dots\ y_n],\ B = [v\ \ Y].$$

Тогда $B^{-1} = B^T$,

$$B^T AB = \begin{bmatrix} v^T Av & v^T AY \\ Y^T Av & Y^T AY^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda v^T Y \\ \lambda Y^T v & Y^T AY^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & Y^T AY^T \end{bmatrix}.$$

Таким образом

$$(\lambda - t)^k P(t) = \chi_A(t) = (\lambda - t)\chi_Y(T),$$

т.е. $\chi_Y(T) = (\lambda - t)^{k-1} P(t)$, а значит λ – с.ч. Y, повторив k раз получаем искомые векторы.

Замечание. Важным следствием является диагонализируемость A.

Жорданова форма

Не любая матрица допускает диагонализацию, однако для любой матрицы существует жорданова форма $A = P^{-1}JP$, где

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_k \end{pmatrix}$$

а J_i – так называемый жорданов блок и имеет вид

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Квадратичные формы

Квадратичной формой в K^n называется выражение

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c,$$

где $a_{ij}, x_i, b_i, c \in K$. Форма называется однородной если $b_i = c = 0$. Если обозначить $A = (a_{ij})$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, то форму можно записать в виде

$$x^TAx + x^Tb + c$$

Отметим, что форма не однозначно задается в таком виде: любая матрица $D = (d_{ij})$, для которой $d_{ij} + d_{ji} = a_{ij} + a_{ji}$ может быть использована вместо A в указанном представлении. Однако, среди таких матриц симметричной является единственная матрица

$$\frac{1}{2}(A + A^T)$$

Положительная определенность

Матрица A называется положительно определенной, если для любого ненулевого вектора x выполняется

$$x^T A x > 0.$$

Если же вместо строгого неравенства имеет место нестрогое, то A называется положительно полуопределенной.

Положительная определенность естественным образом задает частичный порядок "$\preceq$" на матрицах $n \times n$: $A \preceq B$ если $B - A$ положительно полуопределена и $A \prec B$ если $B - A$ положительно определена.

Основная характеристика положительной определенности

Заметим, что диагональная матрица $D = \mathrm{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$ положительна определена тогда и только тогда, когда её диагональные элементы строго положительны

$$x^T D x = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i^2 > 0 \; \forall x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; d_i > 0 \; 1 \leq i \leq n$$

Следовательно диагонализируемая матрица положительно определена тогда и только тогда, когда все её собственные числа строго положительны:

$$x^T A x = (x^T P^{-1}) D (P x)$$

Используя обратимость P получаем, что любой вектор y может быть представлен в виде $y = Px$.
Таким образом, матрица A положительно определена тогда и только тогда когда все собственные числа

$$\frac{1}{2}(A + A^T)$$

положительны.