Математический анализ

Ермилов Антон, Никифоровская Анна

25 ноября 2016 г.

Содержание

1. Введение.

1.1. Множества.

***Определение* 1.1.1.** Множество — набор уникальных элементов.

$A \subset B$ (A — подмножество B, $\forall\, a \in A \Rightarrow a \in B$).

$A \subset B \iff B \supset A$

$A = B \iff A \subset B$ and $B \subset A$

***Определение* 1.1.2.** Операции с множествами:

1. $A \cup B = \{x : x \in A$ или $x \in B\}$ (объединение множеств)
2. $A \cap B = \{x : x \in A$ и $x \in B\}$ (пересечение множеств)
3. $A \setminus B = \{x : x \in A$ и $x \notin B\}$ (разность множеств)
4. $A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (симметрическая разность)

Замечание. $\cup, \cap, \vartriangle$ — коммутативны, ассоциативны.

Теорема 1.1.1. Правила де Моргана:

1. $A \setminus (\bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$
2. $A \setminus (\bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$

Доказательство.

Докажем первое утверждение (второе доказывается аналогично).

Возьмём $x \in A \setminus (\bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha)$. Получаем, что $x \in A$ и $x \notin \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \iff x \in A$ и $x \notin B_\alpha \;\; \forall\, \alpha \in I \iff$ $\iff x \in A \setminus B_\alpha \;\; \forall\, \alpha \in I \iff x \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$. Доказано. □

Теорема 1.1.2.

1. $A \cup (\bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$
2. $A \cap (\bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$

Доказательство.

Докажем первое утверждение (второе доказывается аналогично).

Возьмём $x \in A \cup (\bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha) \iff x \in A$ или $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \iff x \in A$ или $x \in B_\alpha \;\; \forall\, \alpha \in I \iff$ $\iff x \in A \cup B_\alpha \;\; \forall\, \alpha \in I \iff x \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$. Доказано. □

1.2. Отношения.

***Определение* 1.2.1.** Упорядоченная пара $\langle a,\, b\rangle$ — пара "пронумерованных" элементов.

$$\langle a_1,\, a_2\rangle = \langle b_2,\, b_2\rangle \iff \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$$

***Определение* 1.2.2.** Кортеж — упорядоченный набор из нескольких элементов.

$\langle a_1,\, a_2,\, a_3,\, ...,\, a_n\rangle$

***Определение* 1.2.3.** Декартово произведение множеств.

$A \times B = \{\langle a,\, b\rangle : a \in A,\ b \in B\}$

***Определение* 1.2.4.** Бинарным отношением R называется подмножество элементов декартова произведения двух множеств ($R \subset A \times B$).

Элементы $x \in A$ и $y \in B$ находятся в отношении, если $\langle x,\, y\rangle \in R$ (то же, что xRy).

Обратное отношение $R^{-1} \subset B \times A$.

Пример.

Отношение равенства на некотором множестве A.

$R = \{\langle x,\, x\rangle : x \in A\}$

$\forall\, x,\, y \in A : xRy \iff x = y$

***Определение* 1.2.5.** Область определения. Область значений.

$\delta_R = \{x \in A : \exists\, y \in B,\ \text{т.ч. } \langle x,\, y\rangle \in R\}$ (область определения)

$\rho_R = \{y \in B : \exists\, x \in A,\ \text{т.ч. } \langle x,\, y\rangle \in R\}$ (область значений)

$\delta_{R^{-1}} = \rho_R,\ \rho_{R^{-1}} = \delta_R$

***Определение* 1.2.6.** Композиция отношений.

$R_1 \subset A \times B, \quad R_2 \subset B \times C, \quad R_1 \circ R_2 \subset A \times C$

$R_1 \circ R_2 = \{\langle x,\, z\rangle : x \in A,\, z \in C \text{ и } \exists\, y \in B : \langle x,\, y\rangle \in R_1,\ \langle y,\, z\rangle \in R_2\}$.

Пример.

$A = B$

$\langle x,\, y\rangle \in R$, если x — отец y.

$\langle x,\, y\rangle \in R \circ R$, если x — дед y.

$\langle x,\, y\rangle \in R^{-1} \circ R$, если x — брат y.

δ_R — все, у кого есть сыновья.

ρ_R — философский вопрос :)

***Определение* 1.2.7.** Отношение называется:

- Рефлексивным, если $xRx\ \ \forall\, x$.
- Симметричным, если $xRy \implies yRx$.
- Транзитивным, если $xRy,\ yRz \implies xRz$.
- Иррефлексивным, если $\neg\, xRx\ \ \forall\, x$.
- Антисимметричным, если $xRy,\ yRx \implies x = y$.

***Определение* 1.2.8.** R является отношением:

1. Эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.
2. Нестрогого частичного порядка, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.
3. Нестрогого полного порядка, если выполняется п. $2 + \forall\, x,\, y$ либо xRy, либо yRx.
4. Строгого частичного порядка, если оно иррефлексивно и транзитивно.
5. Строгого полного порядка, если выполняется п. $4 + \forall\, x,\, y$ либо xRy, либо yRx.

Пример.

1. $x \equiv y \pmod{m}$ — отношение эквивалентности.
2. X — множество, 2^X — множество всех его подмножеств.
   $\forall\, x,\, y \in 2^X : \langle x,\, y\rangle \in R$, если $x \subsetneq y$ — отношение строгого частичного порядка.
3. Лексикографический порядок на множестве пар натуральных чисел — отношение нестрогого полного порядка.

1.3. Вещественные числа

1.3.1. Понятие вещественных чисел

***Определение* 1.3.1.** Вещественные числа — алгебраическая структура, над которой определены операции сложения «+» и умножения «·» ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

***Определение* 1.3.2.** Аксиомы вещественных чисел.

A1. Ассоциативность сложения
$x + (y + z) = (x + y) + z$

A2. Коммутативность сложения
$x + y = y + x$

A3. Существование нуля
$\exists\, 0 \in \mathbb{R} : \forall\, x \in R\;\; x + 0 = x$

A4. Существование обратного элемента по сложению
$\forall\, x \in \mathbb{R}\; \exists\, (-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$

M1. Ассоциативность умножения
$x(yz) = (xy)z$

M2. Коммутативность умножения
$xy = yx$

M3. Существование единицы
$\exists\, 1 \in \mathbb{R} : \forall\, x \in \mathbb{R}\;\; x \cdot 1 = x$

M4. Существование обратного элемента по умножению
$\forall\, x \in \mathbb{R}\; \exists\, x^{-1} \in \mathbb{R} : x \cdot x^{-1} = 1$

AM. Дистрибутивность
$(x+y)z = xz + yz$

O1. $x \leqslant x \ \forall x$

O2. $x \leqslant y$ и $y \leqslant x \implies x = y$

O3. $x \leqslant y$ и $y \leqslant z \implies x \leqslant z$

O4. $\forall x,\, y \in \mathbb{R} : x \leqslant y$ или $y \leqslant x$

O5. $x \leqslant y \implies x + z \leqslant y + z \ \forall z$

O6. $0 \leqslant x$ и $0 \leqslant y \implies 0 \leqslant xy$

Объекты, отвечающие аксиомам A1-A4, M1-M4 и AM, образуют поле.

Аксиомы O1-O6 называются аксиомами порядка и задают порядок на множестве вещественных чисел.

***Определение* 1.3.3.** Аксиома полноты.

$A,\, B \subset \mathbb{R} : A \neq \varnothing,\ B \neq \varnothing,\ \forall\, a \in A\ \ \forall\, b \in B\ \ a \leqslant b$

Тогда $\exists\, c \in \mathbb{R} : a \leqslant c \leqslant b\ \ \forall\, a \in A\ \ \forall\, b \in B$.

Замечание. Для $\mathbb{Q}$ аксиома полноты не выполняется:

$A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$

$B = \{b \in \mathbb{Q} : b \geqslant 0,\ b^2 > 2\}$

Тогда не существует $c \in \mathbb{Q} : a \leqslant c \leqslant b$, т.к. $c^2 = 2$.

1.3.2. Принцип математической индукции

Принцип математической индукции.

Положим P_n — последовательность утверждений.

1. P_1 — верно

2. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ из P_n следует P_{n+1}.

Тогда P_n верно при всех $n \in \mathbb{N}$.

Утверждение 1.3.1. В конечном множестве вещественных чисел есть наибольший и наименьший элемент.

Доказательство.

Будем доказывать это утверждение по индукции. Докажем для минимума (для максимума аналогично).

База: $n = 1$ — очевидно.

Переход: $n \to n + 1$.

Рассмотрим произвольное множество из n элементов $\{x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n\}$. Пусть мы уже знаем, что минимумом в нём является элемент x_k. Тогда рассмотрим то же множество с добавленным в него элементом x_{n+1}. Заметим, что:

1. $x_k \leqslant x_{n+1} \implies x_k$ — минимум

2. $x_k > x_{n+1} \implies$ минимумом является новый добавленный элемент x_{n+1}.

Таким образом, в любом конечном множестве вещественных чисел существует минимальный элемент. $\square$

1.3.3. Принцип Архимеда

Согласно принципу Архимеда, $\forall x \in \mathbb{R}$ и $\forall y > 0 \in \mathbb{R}\ \ \exists n \in \mathbb{N} : x < ny$.

Доказательство.

$A = \{a \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : a < ny\},\ A \neq \varnothing,$ т.к. $0 \in A$

$B = \mathbb{R} \setminus A$

Пусть $A \neq \mathbb{R}$. Тогда $B \neq \varnothing$. Покажем, что $a \leqslant b$, если $a \in A,\ b \in B$.

От противного. Пусть $b < a < ny \implies b < ny \implies b \in A \implies$ противоречие.

Таким образом, по аксиоме полноты существует $c \in \mathbb{R} : a \leqslant c \leqslant b\ \ \forall a \in A\ \ \forall b \in B$.

Пусть $c \in A$. Тогда $c < ny$ для некоторого $n \in \mathbb{N} \implies c + y < (n+1)y \implies c + y \in A \implies c + y \leqslant c \implies y \leqslant 0$. Пришли к противоречию.

Пусть $c \in B$. Возьмём $c - y < c \implies c - y \in A \implies c - y < ny \implies c < (n+1)y \implies c \in A$. Снова противоречие.

Таким образом, мы получили, что такое c не существует $\implies B = \varnothing \implies A = \mathbb{R}$. $\square$

Следствие.

1. $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$

   Доказательство.

   $x = 1,\ y = \varepsilon \implies \exists n \in \mathbb{N} : 1 < n\varepsilon$. $\square$

2. Если $x, y \in \mathbb{R},\ x < y$, то $\exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$.

   Доказательство.

   Пусть $x < 0$, $y > 0$. Тогда $\exists r = 0 \in \mathbb{Q} : x < r < y$.

   Пусть $x \geqslant 0,\ \varepsilon = y - x$. Тогда $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$.

   По принципу Архимеда найдётся такое число m, что $\frac{m-1}{n} \leqslant x < \frac{m}{n}$.

   Предположим, что $\frac{m-1}{n} \leqslant x < y \leqslant \frac{m}{n}$. Однако тогда получаем, что $\frac{1}{n} \geqslant y - x = \varepsilon$. Получили противоречие.

   Следовательно, $\exists m \in \mathbb{N} : x < \frac{m}{n} < y$.

   Случай $y \leqslant 0$ аналогичен предыдущему. $\square$

3. Если $x, y \in \mathbb{R}$ и $x < y$, то $\exists$ иррациональное число $r : x < r < y$.

   Доказательство.

   $x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} \implies \exists r \in (x - \sqrt{2}, y - \sqrt{2}) \implies x < r + \sqrt{2} < y \implies r -$ иррациональное. $\square$

4. Если $x \geqslant 1$, то $\exists n \in \mathbb{N} : x - 1 < n \leqslant x$

1.4. Верхняя и нижняя границы

***Определение* 1.4.1.** $A \subset \mathbb{R}$

a — верхняя граница множества A, если $\forall x \in A : x \leqslant a$.

b — нижняя граница множества A, если $\forall x \in A : b \leqslant x$.

Множество ограничено сверху, если $\exists$ какая-нибудь верхняя граница.

Множество ограничено снизу, если $\exists$ какая-нибудь нижняя граница.

***Определение* 1.4.2.** Пусть A — ограниченное сверху множество. Тогда $\sup A$ (супремум) — наименьшая из его верхних границ.

***Определение* 1.4.3.** Пусть A — ограниченное снизу множество. Тогда $\inf A$ (инфимум) — наибольшая из его нижних границ.

Пример.

1. $\mathbb{N}$ не ограничено сверху (принцип Архимеда).

   Пусть это не так. Тогда $\exists a \in \mathbb{R} : n \leqslant a \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Однако $\exists y = 1, x = a : x < ny$ для некоторого $n \in \mathbb{N} \implies$ противоречие.

2. $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \implies \sup = 1$

   Нижняя граница — любое число $\leqslant 0 \implies \inf = 0$.

Теорема 1.4.1.

1. Если $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ и A ограничено снизу, то $\exists!\inf A$.
2. Если $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ и A ограничено сверху, то $\exists!\sup A$.

Доказательство.

Докажем п. 2.

Пусть B — множество всех верхних границ A, т.е. $\forall a \in A \;\; \forall b \in B : a \leqslant b$.

Тогда по аксиоме полноты получаем, что $\exists c : \forall a \in A \;\; \forall b \in B \;\; a \leqslant c \leqslant b$.

Следовательно, c — $\sup A$ (по определению).

Покажем, что c единственно. Пусть это не так и c_1, c_2 — $\sup A$. Тогда рассмотрим два случая:

1. $c_1 < c_2 \implies c_2$ не является супремумом $\implies$ противоречие.
2. $c_2 < c_1 \implies c_1$ не является супремумом $\implies$ противоречие.

Следовательно, $c_1 = c_2 \implies \sup A$ — единственный. □

Следствие.

1. $B \subset A$, $B \neq \varnothing$ и A ограничено снизу. Тогда $\inf B \geqslant \inf A$.
2. $B \subset A$, $B \neq \varnothing$ и A ограничено сверху. Тогда $\sup B \leqslant \sup A$.

Доказательство.

Докажем п. 1.

Пусть $a = \inf A$. Тогда a — нижняя граница $A \implies \forall x \in A : a \leqslant x \implies \forall x \in B : a \leqslant x \implies$ a — нижняя граница $B \implies a \leqslant \inf B$. □

Замечание. Теорема неверна без аксиомы полноты:

$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} \implies$ в множестве рациональных чисел у A нет sup.

Теорема 1.4.2.

1. $a = \inf A \iff \begin{cases} a \leqslant x \;\; \forall\, x \in A \\ \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, x \in A : x < a + \varepsilon \end{cases}$

2. $b = \sup A \iff \begin{cases} x \leqslant b \;\; \forall\, x \in A \\ \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, x \in A : x > b - \varepsilon \end{cases}$

Доказательство. Докажем п. 1.

$a = \inf A \iff a$ — наибольшая из всех нижних границ A

$$\iff \begin{cases} a \text{ — нижняя граница} \\ \text{число} > a \text{ не является нижней границей} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a \leqslant x \;\; \forall\, x \in A \\ \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, x \in A : x < a + \varepsilon \end{cases}$$

□

Замечание.

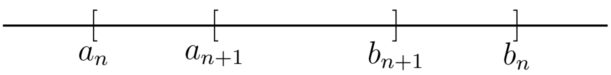
Если A не ограничено сверху, то $\sup A = +\infty$.

Если A не ограничено снизу, то $\inf A = -\infty$.

1.5. Теорема о вложенных отрезках

Теорема 1.5.1. $[a_1,\, b_1] \supset [a_2,\, b_2] \supset [a_3,\, b_3] \supset ...$

Тогда $\exists c \in \mathbb{R} : c \in [a_n,\, b_n] \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.



Доказательство.

$A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$

$B = \{b_1, b_2, b_3, ...\}$

A лежит левее B, т.е. $a_i \leqslant b_j \;\; \forall\, i,\, j \in \mathbb{N}$.

При этом $\forall\, i \leqslant j : a_i \leqslant a_j \leqslant b_j$, $\forall\, i \geqslant j : a_i \leqslant b_i \leqslant b_j$.

По аксиоме полноты $\exists\, c \in \mathbb{R} : a_i \leqslant c \leqslant b_j \;\; \forall\, i,\, j \in \mathbb{N} \implies a_i \leqslant c \leqslant b_i \;\; \forall\, i \in \mathbb{N}$. □

Замечание.

1. Для интервалов и полуинтервалов неверно.

   Пример: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (0;\ \frac{1}{n}] = \varnothing$.

2. Для лучей также неверно.

   Пример: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [n;\ +\infty) = \varnothing$.

3. Без аксиомы полноты также неверно.

   Пример: $\pi = 3,1415926535...$

   $[3;\ 4] \supset [3,1;\ 3,2] \supset [3,14;\ 3,15] \supset ...$

   В пересечении нет рациональных чисел.

2. Последовательности вещественных чисел

2.1. §3 Число e

Лемма (Неравенство Бернулли)**.** Если $x > -1, n \in \mathbb{N}$, то $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

Доказательство. по индукции.

База $n = 1$ – очевидно.

Инд. переход. $n \to n+1$

Знаем, что $(1+x)^n \geqslant 1+nx \Longrightarrow (1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geqslant (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x$.

Что и требовалось. □

Замечание.

- Равенство лишь когда $n = 1$ или $x = 0$.
- Неравенство верно и для $n \in \mathbb{R}\quad n \geqslant 1$ или $n \leqslant 0$. При $0 \leqslant n \leqslant 1$ неравенство верно с обратным знаком.

Пример 1.

$|\,a\,| < 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$

Докажем для $|\,a\,|$, что $\frac{1}{|\,a\,|} > 1 \Longrightarrow \frac{1}{|\,a\,|} = 1 + x$, где $x > 0$

$(\frac{1}{|\,a\,|})^n = (1+x)^n \geqslant 1 + nx > nx$

$|\,a\,|^n \leqslant \frac{1}{nx} \to 0 \Longrightarrow |\,a\,|^n \to 0$

Пример 2.

$x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ $y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ Покажем, что y_n монотонно убывает.

$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n-1})^n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}}{\frac{n^n}{(n-1)^n}} = \frac{(n+1)^{n+1}(n-1)^n}{n^{2n+1}} = \frac{n+1}{n}(\frac{n^2-1}{n^2})^n$

$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{n}{n+1}(1+\frac{1}{n^2-1})^n \geqslant \frac{n}{n+1}(1+\frac{n}{n^2-1}) = \frac{n}{n+1}(\frac{n^2+n-1}{n^2-1}) = \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1$

Д-м, что x_n монотонно возрастает.

$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} = \frac{(n+1)^n(n-1)^{n-1}}{n^{2n-1}} = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{(n^2-1)^n}{n^{2n}} = \frac{n}{n-1}(1-\frac{1}{n^2})^n > \frac{n}{n-1}(1-\frac{1}{n}) = 1$

$2 = x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n < y_n < y_{n-1} < y_{n-2} < ... < y_1 = 4$

А значит, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

***Определение* 2.1.1.** $e = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

Свойства.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = e$ по произведению пределов
2. $\forall n\ \ x_n < e < y_n$

Доказательство. $x_n < x_{n+1} < x_{n+2} < ...$

$x_{n+1} < x_k$ при $k \geqslant n+2 \implies x_{n+1} \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} x_k = e \implies x_n < x_{n+1} \leqslant e$ □

3. $2 < e < 3$, т.к. $x_1 = 2$, а $e < y_{10} < 3$.

4. $e \approx 2.71828182845904523536028 7$

   $y_n - x_n = (1 + \frac{1}{n} - 1)(1+\frac{1}{n})^n < \frac{e}{n}$

Теорема 2.1.1. $x_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Доказательство.

$l = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}}{x_k}$. Пусть $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$. Тогда найдется N, т.ч. $\forall k \geqslant N \ \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} - l \right| < \varepsilon$

Значит $\frac{x_{k+1}}{x_k} < \frac{1+l}{2}$.

Тогда $x_k = x_N \cdot \frac{x_{N+1}}{x_N} \cdot ... \cdot \frac{x_k}{x_{k-1}} < x_N(\frac{1+l}{2})^{k-N} \to 0$ □

Следствие (1.). $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, если $a > 1$.

Доказательство.

$x_n = \frac{n^k}{a^n}$

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} : \frac{n^k}{a^n} = (\frac{n+1}{n})^k \frac{1}{a} \to \frac{1}{a} < 1$ □

Следствие (2.). $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

Доказательство. Можно считать, что $a > 0$.

$x_n = \frac{a^n}{n!}$ $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{a^n}{(n)!} = a\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \to 0 < 1.$ □

Следствие (3.). $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

Доказательство.

$x_n = \frac{n!}{n^n}$

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} : \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)!}{n!}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = (\frac{n}{n+1})^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1$ □

Теорема 2.1.2 (Теорема Штольца)**.**

x_n, y_n

y_n строго монотонно возрастает. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$

Доказательство.

1. Случай $l = 0$.

   $\varepsilon_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$

   $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$

   $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geqslant N \quad |\varepsilon_n| < \varepsilon$

   $n > m \geqslant N$

$x_n - x_m = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + ... + (x_{m+1} - x_m) = \varepsilon_n(y_n - y_{n-1}) + ... + \varepsilon_{m+1}(y_{m+1} - y_m)$

$|\, x_n - x_m \,| \leqslant \sum\limits_{k=m+1}^{n} |\, \varepsilon_k \,| \, (y_k - y_{k-1}) < \varepsilon \sum\limits_{k=m+1}^{n} (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon(y_n - y_m)$

Поскольку $y_n \to +\infty$ $y_n > 0$ начиная с какого-то номера. Можно считать, что с номера N.

$|\, x_n - x_m \,| < \varepsilon(y_n - y_m) < \varepsilon y_n$

$\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{x_m}{y_n} \right| < \varepsilon \implies \left| \frac{x_n}{y_n} \right| < \varepsilon + \frac{|\, x_m \,|}{y_n} < 2\varepsilon$

Выберем такой номер N_1, что $y_n > \frac{|\, x_m \,|}{\varepsilon_n}$

Следовательно, если $n \geqslant \max{(N, N_1)}$, то $\left| \frac{x_n}{y_n} \right| < 2\varepsilon$

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$.

2. $l \in \mathbb{R}$ $\quad \widetilde{x}_n = x_n - l y_n$

   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l = l - l = 0$

   Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\widetilde{x}_n}{y_n} = 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - l y_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} - l = 0 \quad \implies \quad \frac{x_n}{y_n} = l$

3. $l = +\infty$

   Проверим, что x_n строго монотонно возрастает начиная с некоторого места.

   $\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty$

   Значит, начиная с некоторого номера N $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1$.

   Значит $x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} > 0 \implies x_n$ строго возрастает.

   $x_n - x_N = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + ... + (x_{N+1} - x_N) > (y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + ... + (y_{N+1} - y_N) = y_n - y_N \to +\infty$

   А значит $x_n \to +\infty$

   $\implies$

   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0 \implies \frac{y_n}{x_n} = 0 \implies \frac{x_n}{y_n} = +\infty$

4. $l = -\infty$

   Аналогично с пунктом 3.

$\square$

Пример. к теореме Штольца:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{m+1}} \sum\limits_{k=1}^{n} k^m$, $m \in \mathbb{N}$

$x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^n, y_n = n^{m+1}, y_n \to +\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^m}{n^{m+1} - (n-1)^{m+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 - (1 - \frac{1}{n})^{m+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{(m+1)\frac{1}{n} + ... \frac{1}{n^2} + ... \frac{1}{n^3} + ...} =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(m+1) + ... \frac{1}{n} + ... \frac{1}{n^2} + ...} = \frac{1}{m+1}$

Тогда по теореме Штольца:

$\lim\limits_{n\to\infty} = \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{m+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{m+1}} \sum\limits_{k=1}^{n} k^m$

Теорема 2.1.3 (Теорема Штольца-2).

y_n – строго монотонная последовательность и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$

Тогда если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$

Доказательство.

1. Случай $l = 0$

   $\varepsilon_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}}$

   Тогда $\exists N \ \ \forall k \geqslant N \quad |\, \varepsilon_k \,| < \varepsilon$

   Рассмотрим $n > m \geqslant N$

   $x_n - x_m = \sum\limits_{k=m+1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \sum\limits_{k=m+1}^{n} (y_k - y_{k-1})$

   Тогда $|\, x_n - x_m \,| \leqslant \sum\limits_{k=m+1}^{n} |\, \varepsilon_k \,| \, (y_k - y_{k-1}) < \sum\limits_{k=m+1}^{n} \varepsilon(y_k - y_{k-1}) = \varepsilon(y_n - y_m)$

   Тогда устремим $n \to \infty$

   $|\, x_n - x_m \,| \to |\, x_m \,|, \varepsilon(y_n - y_m) \to \varepsilon(-y_m)$.

   А теперь по теореме о двух миллиционерах $x_n \leqslant -\varepsilon y_m = \varepsilon \,|\, y_m \,|$, т.к. $y_m < 0$

   $\Longrightarrow$

   $|\, x_n \,| \leqslant \varepsilon \,|\, y_m \,| \implies \left| \frac{x_n}{y_m} \right| \leqslant \varepsilon$, и это верное $\forall m \geqslant N \implies \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$

2. $l \in \mathbb{R}$

   $\tilde{x}_n = x_n - l y_n \implies \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\tilde{x}_n}{y_n} = 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$

3. $l = +\infty$

   Проверим, что x_n строго монотонно(начиная с некоторого места)

   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty \implies$ при $n \geqslant N \quad \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1 \implies x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} > 0 \implies x_n$ строго монотонно возрастает при $n \geqslant N$

   Значит, можно поменять x и y

   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$

   Т.к. $x_n \nearrow, y_n \nearrow \implies x_n < 0, y_n < 0 \implies \frac{x_n}{y_n}$ – положительно.

4. $l = -\infty$

   Вместо x_n напишем $\tilde{x}_n = -x_n$, получим предыдущий пункт.

$\square$

2.2. §4. Подпоследовательности

***Определение* 2.2.1.**

$x_1, x_2, x_3, \ldots$

$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, причем все $n_i \in N$

Тогда подпоследовательность исходной последовательности:

$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots$

Пример.

$1, 2, 3, 4, 5, ...$

1. $2, 4, 6, 8, ...$ – подпоследовательность
2. $1, 4, 9, 16, 25, ...$ – подпоследовательность
3. $1, 1, 2, 3, 5, ..$ – не подпоследовательность

Свойства.

1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то предел любой подпоследовательности тоже равен l.

   Доказательство. Если снаружи интервала было лишь конечное число членов последовательности, то и у подпоследовательности было конечное число членов снаружи этого интервала.(подпоследовательность – стерли некоторые члены последовательности) $\square$

2. Если $n_1, n_2, n_3, ...$ это последовательность $\{n_k\}$

   и $m_1, m_2, m_3, ...$ это последовательность $\{m_l\}$

   и в объединении это все натуральные числа, то:

   Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim\limits_{l\to\infty} x_{m_l} = a \in \overline{\mathbb{R}}$

   Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

   Доказательство. Есть интервал. Вне его конечное число x_{n_k} и вне интервала конечное число x_{m_l}. Поскольку все x либо там, либо там, то снаружи просто конечное число членов x_n. $\square$

Теорема 2.2.1 (О стягивающихся отрезках)**.**

Есть много отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset ...$

и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$

Тогда существует единственное $c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$

Доказательство. По теореме о вложенных отрезках, это пересечение не пусто. Надо проверить, что там нет двух точек.

Пусть там лежат точки $c < d$

Тогда $d - c \leqslant b_n - a_n$.

Перейдем в неравенстве к пределу:

$d - c \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$. Получили противоречие. Осталось проверить лишь пределы концов отрезка.

$0 \leqslant c - a_n \leqslant b_n - a_n \to 0 \implies c - a_n \to 0$, а это тоже самое, что $a_n \to c$

Аналогично $0 \leqslant b_n - c \leqslant b_n - a_n \to 0 \implies b_n - c \to 0$, а это тоже самое, что $b_n \to c$ $\square$

Теорема 2.2.2 (Теорема Больцано-Вейерштрасса)**.**

Из любой ограниченной последовательности можно выбрать подпоследовательность, имеющую конечный предел.

Доказательство.

Пусть a – нижняя граница, b – верхняя граница для всех x_n.

Значит, $x_n \in [a, b] \ \ \forall n$

Хотя бы в одну половинку от этого отрезка попало бесконечное число членов последовательности. Пусть эта новая половинка – $[a_1, b_1]$.

В хотя бы одной половинке этого отрезка снова бесконечное число членов последовательности. Эта половинка $[a_2, b_2]$.

Действуем так и дальше.

Заметим, что $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset ...$

$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$

Следовательно, по теореме о стягивающихся отрезках, есть ровно одна общая точка. $\exists c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$.

Теперь строим подпоследовательность.

Пусть x_{n_1} – произвольный элемент последовательности из отрезка $[a_1, b_1]$

x_{n_2} – такой элемент из $[a_2, b_2]$, что $n_2 > n_1$. (найдется в силу бесконечности членов, содержащихся в данном отрезке)

x_{n_3} – такой элемент последовательности из $[a_3, b_3]$, что $n_3 > n_2$.

Продолжаем.

Получим:

$n_1 < n_2 < n_3 < ...$

$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3} ...$ – подпоследовательность, причем $x_{n_k} \in [a_n, b_n]$.

$a_n \leqslant x_{n_k} \leqslant b_n$, причем $a_n \to c, b_n \to c \implies x_{n_k} \to c$. Что нам и требовалось.

□

Лемма.

1. Пусть x_n – монотонно возрастающая и неограниченная последовательность. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$
2. Пусть x_n – монотонно убывающая и неограниченная последовательность. Тогда $\lim x_n = -\infty$

Доказательство.

Докажем только первый пункт, второй точно такой же.

Взяли какое-то E. Тогда E не является верхней границей для $\{x_n\}$. Тогда $\exists N \ \ x_N > E$. Но т.к. последовательность возрастает, то все большие тоже больше E.

Получаем, что $\forall n > N \ \ x_n > x_N > E \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ по определению. □

Следствие.

1. Из любой неограниченной сверху последовательности можно выбрать подпоследовательность, стремящуюся к $+\infty$
2. Из любой неограниченной снизу последовательности можно выбрать подпоследовательность, стремящуюся к $-\infty$

Доказательство.

1. Выберем монотонно возрастающую неограниченную подпоследовательность. Тогда автоматически ее предел будет $+\infty$

   1 не является верхней границей последовательности. $\implies \exists x_{n_1} > 1$.

   $\max\{x_1, x_2, ...x_{n_1}, 2\}$ – не является верхней границей. Тогда $\exists x_{n_2}$, больший этого max.

   Во-первых, тогда $x_{n_2} > 2$ и $n_1 < n_2$.

   $\max\{x_1, x_2, ...x_{n_2}, 3\}$ – не является верхней границей. Тогда $\exists x_{n_3}$, больший этого max. Заметим, что тогда $x_{n_3} > 3$ и $n_3 > n_2$.

   И так далее.

   Получаем:

   $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < ...$, причем $x_{n_k} > k$, причем $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3} < ....$

   Получаем, что это монотонно возрастающая и неограниченная подпоследовательность.

   $\implies \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$.

□

Следствие. Из любой последовательности можно выбрать подпоследовательность, имеющую предел в $\overline{\mathbb{R}}$

Доказательство.

Если ограничена, то это теорема Больцано-Вейерштрасса. Если не ограничена, то это предыдущее следствие. □

***Определение* 2.2.2.** x_n называется фундаментальной(сходящейся в себе или последовательностью Коши), если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall m, n \geqslant N \implies |\, x_n - x_m \,| < \varepsilon$.

Свойства.

1. Фундаментальная последовательность ограничена.

   Доказательство. Подставим $\varepsilon = 1$ тогда $\exists N \ \forall m, n \geqslant N \ \ |\, x_m - x_n \,| < \varepsilon$.

   Возьмем $M = \max\{|\, x_1 \,|, |\, x_2 \,|, |\, x_3 \,|, ..., |\, x_N \,|\} + 1$.

   Покажем, что $|\, x_n \,| \leqslant M$.

   Если $n < N$, то очевидно.

   Если $n \geqslant N \implies |\, x_n - x_N \,| < 1, \ \ |\, x_n - x_N \,| + |\, x_N \,| \geqslant |\, x_n \,|$ (по сумме модулей) $\implies |\, x_n \,| < M$

   □

2. Если у фундаментальной последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то фундаментальная последовательность сходится.

   Доказательство. $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность.

   $\{x_{n_k}\}$ – сходящаяся подпоследовательность, т.е. $\lim x_{n_k} = l \in \mathbb{R}$.

   Надо доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$

$\exists N \ \ \forall m, n \geqslant N \quad |\, x_m - x_n \,| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists K \ \ \forall k \geqslant K \quad |\, x_{n_k} - l \,| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\tilde{N} = \max\,(N, n_K)$

Пусть $n \geqslant \tilde{N}$ тогда $|\, x_n - x_m \,| < \frac{\varepsilon}{2}$, если $m \geqslant \tilde{N}$.

В качестве m возьмем n_k, т.ч. $k \geqslant K$ и $n_k \geqslant N$.

$|\, x_n - x_{n_k} \,| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|\, x_{n_k} - l \,| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|\, x_n - l \,| \leqslant |\, x_n - x_{n_k} \,| + |\, x_{n_k} - l \,| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ □

Теорема 2.2.3 (Критерий Коши)**.**

Последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел $\iff$ $\{x_n\}$ – фундаментальна.

Доказательство.

“ $\Longrightarrow$ ”:

Пусть $l = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$.

$\exists N \ \ \forall n \geqslant N \,|\, x_n - l \,| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall m \geqslant N \,|\, x_m - l \,| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Longrightarrow \ |\, x_n - x_m \,| \leqslant |\, x_n - l \,| + |\, l - x_m \,| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Док-во в другую сторону:

$\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность. Тогда она ограничена. А по теореме Больцано-Вейерштрасса существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, имеющая конечный предел. Тогда по свойству 2 фундаментальной последовательности $\{x_n\}$ имеет конечный предел. □

***Определение* 2.2.3.** Частичные пределы.

$\{x_n\}$ – последовательность. $l \in \overline{\mathbb{R}}$ – частичный предел, если существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, т.ч. $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = l$.

Теорема 2.2.4. l – частичный предел $\iff$ в любой окрестности l есть бесконечно много членов последовательности.

Доказательство.

Стрелочка “ $\Longrightarrow$ ” очевидна.

Докажем в другую сторону.

$\forall \varepsilon > 0$ в интервале $(l - \varepsilon; l + \varepsilon)$ бесконечно много членов последовательности.

Посмотрим на интервал $(l-1; l+1)$. Там бесконечно много членов последовательности. Возьмем один из них. Он x_{n_1}

$\varepsilon = \frac{1}{2}$. В $(l - \frac{1}{2}; l + \frac{1}{2})$ бесконечно много членов последовательности, а значит есть и член, номер которого больше n_1. Он x_{n_2}.

$\varepsilon = \frac{1}{3}$. В $(l - \frac{1}{3}; l + \frac{1}{3})$ бесконечно много членов последовательности, а значит есть и член, номер которого больше n_2. Он x_{n_3}.

И так далее.

В итоге получается набор индексов, который строго растет.

$n_1 < n_2 < n_3 < ...$

Еще знаем, что $x_{n_k} \in (l - \frac{1}{k}; l + \frac{1}{k})$.

$x_{n_k} - l \in (-\frac{1}{k}; +\frac{1}{k})$

Заметим, что т.к. обе границы интервала стремятся к 0, то $x_{n_k} - l \to 0 \implies x_{n_k} \to l$.

Если $l = +\infty$

$E = 1 \quad (1; +\infty) \quad x_{n_1}$

$E = 2 \quad (2; +\infty) \quad x_{n_2} \;\; n_2 > n_1$

$E = 3 \quad (3; +\infty) \quad x_{n_3} \;\; n_3 > n_2$

Ну отсюда и получим, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$. □

***Определение* 2.2.4.** $\{x_n\}$ – последовательность.

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geqslant n} x_k$

Еще обозначается как $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$

Определим нижний предел.

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geqslant n} x_k$.

Еще обозначается $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$

Теорема 2.2.5. Верхний и нижний предел существует в $\overline{\mathbb{R}}$ и $\underline{\lim} \leqslant \overline{\lim}$.

Доказательство.

$y_n = \inf\limits_{k\geqslant n} x_k, \quad z_n = \sup\limits_{k\geqslant n} x_k$

$\inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+3}, ...\} = y_n \leqslant y_{n+1} = \inf\{x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+3}, ...\}$

$\sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+3}, ...\} = z_n \geqslant z_{n+1} = \sup\{x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+3}, ...\}$.

Т.е. $y_n \nearrow$, $z_n \searrow$. Но монотонные последовательности всегда имеют предел в $\overline{\mathbb{R}}$

$y_n \leqslant z_n$

$\implies \underline{\lim} \leqslant \overline{\lim}$.

□

Замечание.

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \inf\limits_n \sup\limits_{k\geqslant n} x_k$

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \sup\limits_n \inf\limits_{k\geqslant n} x_k$

Теорема 2.2.6.

1. Верхний предел – наибольший из всех частичных пределов.
2. Нижний предел – наименьший из всех частичных пределов.
3. Если $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

Доказательство.

1. Докажем, что верхний передел – это частичный предел.

   $a = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a, z_n = \sup\limits_{k\geqslant n} x_k$. z_n убывает.

   Пусть $a \in \mathbb{R}$. $a \leqslant z_n = \sup\limits_{k\geqslant n} x_k$.

   Тогда при любом j найдется какой-то x_k, т.ч. $k \geqslant n \quad x_k > a - \frac{1}{j}$.

   Выберем n_1 так, что $x_{n_1} > a - 1$.

   $n_2 > n_1$ так, что $x_{n_2} > a - \frac{1}{2}$

   $n_3 > n_2$ так, что $x_{n_3} > a - \frac{1}{3}$

   $n_k > n_{k-1}$ так, что $x_{n_k} > a - \frac{1}{k}$

   Во-первых $n_1 < n_2 < n_3 < ...$, значит выбрали подпоследовательность. Осталось проверить предел.

   $a - \frac{2}{k} < x_{n_k} \leqslant z_{n_k}$

   Обе части неравенства стремятся к a. Тогда $x_{n_k} \to a$.

   Пусть $a = +\infty$. Тогда $z_n = +\infty \implies x_n$ – неограниченная сверху последовательность. Тогда у нее есть подпоследовательность, стремящаяся к $+\infty$

   Пусть $a = -\infty$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = -\infty$.

   $-\infty \leqslant x_n \leqslant z_n \to -\infty \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$

   Почему же он наибольший из всех?

   Докажем, что $\overline{\lim} \quad \geqslant$ любого частичного предела.

   Пусть $l = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Тогда

   $x_{n_k} \leqslant z_{n_k}$

   $l = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

2. $x_n \rightsquigarrow -\infty$

3. Пусть $l = \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$.

   Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = l$. А так как $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

$\square$

Теорема 2.2.7.

1. $b = \overline{\lim} x_n \iff \begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geqslant N \ \ x_n < b + \varepsilon \\ \forall\varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n \geqslant N \ \ x_n > b - \varepsilon \end{cases}$

2. $a = \underline{\lim} x_n \iff \begin{cases} \forall\varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geqslant N \ \ x_n > a - \varepsilon \\ \forall\varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n \geqslant N \ \ x_n < a + \varepsilon \end{cases}$

Доказательство.

2. $(\forall\varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geqslant N \ \ x_n > a - \varepsilon) \implies \inf\limits_{n\geqslant N} x_n \geqslant a - \varepsilon$

$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N \ \ y_n > a - \varepsilon$

$(\forall\varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n \geqslant N \ \ x_n < a + \varepsilon) \implies$

$\forall\varepsilon > 0 \ \forall N \ \ \inf x_n < a + \varepsilon \iff y_N < a + \varepsilon$. $\square$

Теорема 2.2.8.

Если $x_n \leqslant y_n$, то $\underline{\lim} x_n \leqslant \underline{\lim} y_n$, $\overline{\lim} x_n \leqslant \overline{\lim} y_n$.

Доказательство.

$x_n \leqslant y_n$.

$\inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\} \leqslant \inf\{y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, ...\}$

$\sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\} \leqslant \sup\{y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, ...\}$

И пишем lim. □

Замечание. Арифметические операции не сохраняются.

2.3. §5 Ряды.

***Определение* 2.3.1.**

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Частичная сумма ряда $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует в $\overline{\mathbb{R}}$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Если этот предел конечный, то ряд сходится.

Если предел бесконечный или не существует, то ряд расходится.

Теорема 2.3.1 (Необходимое условие сходимости ряда.)**.** Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство.

$\sum a_n$ – сходится $\implies \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$ □

Пример.

1. Геометрическая прогрессия.

   $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$

   $S_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $(q \neq 1)$.

   $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}(1 - \lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1})$.

   Если $|\,q\,| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$.

   $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

2. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$

   $S_{2n} = 0$

   $S_{2n-1} = 1$

   А значит, предел не существует, ряд расходится.

3. Гармонический ряд.

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

   $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ – гармонические числа.

   Поймем, что $H_n \to +\infty$.

   $H_n = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + ... > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ...$

   Если влезло m блоков, т.е. $n \geqslant 2^m$, тогда

   $H_n > 1 + \frac{m}{2} \qquad H_{2^m} > 1 + \frac{m}{2}$

   Получаем, что ряд расходится.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

   $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + ... + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1.$

   Ряд сходится и его сумма 1.

Свойства.

1. Сумма ряда единственна. (ибо предел последовательности частичных сумм, а он единственен, если есть)

2. Расстановка скобок.

   $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + ...$ S его сумма.

   $(a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + ...$

   Сумма такого ряда тоже S.

   $S_1\ S_2\ S_3\ S_4\ S_5\ S_6\ S_7 ...$

   Мы по сути берем подпоследовательность:

   $S_2\ S_3\ S_6\ S_8 ...$

   А значит, предел остается прежним, ежели был.

   Замечание. Мы могли расставить скобки так, чтобы предел ПОЯВИЛСЯ.

   $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ...$

3. Добавление/выкидывание конечного числа членов ряда не влияет на сходимость, но может поменять сумму.

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$

   $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \qquad \tilde{S}_n = a_m + a_{m+1} + ... + a_{n+m-1}$

   $\tilde{S}_n = S_{n+m-1} - S_{m-1}$.

   А S_{m-1} – это фиксированное число.

4. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся.

   Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ сходится и ее значение равно $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

Доказательство.

$A_n = \sum a_k, B_n = \sum b_k$

$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to\infty} B_n = B \in \mathbb{R}$

Рассмотрим $\sum(a_n + b_n)$

$S_n = \sum(a_k + b_k) = \sum a_k + \sum b_k = A_n + B_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} Sn = \lim\limits_{n\to\infty}(A_n + B_n) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n + \lim\limits_{n\to\infty} B_n = A + B.$

□

5. Пусть $\sum a_n$ сходится и $c \in \mathbb{R}$.

   Тогда $\sum ca_n$ сходится и по сумме равна $c\sum a_n$

   Доказательство. $S_n = \sum ca_n = c\sum a_n = cA_n \to cA.$ □

3. Предел и непрерывность функций

3.1. §1 Предел функций.

***Определение* 3.1.1.**

Окрестность точки a будем обозначать $U_\varepsilon = (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ при некотором ε.

Проколотая окрестность точки a – это $\dot{U}_\varepsilon = U_\varepsilon \backslash \{a\}$

Окрестность $+\infty$ – луч $(E, +\infty)$

Окрестность $-\infty$ – луч $(-\infty, E)$

***Определение* 3.1.2.** $X \subset \mathbb{R}$. a – предельная точка X, если $\forall$ проколотой окрестности точки a пересечение ее с X не пусто.

***Определение* 3.1.3.** Если $a \in X$ не является предельной, то a – изолированная точка.

Теорема 3.1.1.

Следующие условия равносильны:

1. a – предельная точка множества X
2. В любой окрестности точки a существует бесконечно много точек множества X.
3. Существует такая последовательность точек $x_n \in X$, т.ч. $x_n \neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Замечание. Последовательность из пункта 3 можно выбрать так, что $|\, x_n - a \,|$ строго монотонно убывает.

Доказательство.

3. $\implies$ 1., 2. – очевидно.

$\lim x_n = a \implies$ все члены последовательности с какого-то номера лежат в $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

2. $\implies$ 1..

В окрестности бесконечно много точек из $X \implies$ хотя бы одна точка отличается от a.

А значит, в проколотой окрестности есть точка из X.

1. $\implies$ 3.

a – предельная точка X.

Возьмем $\varepsilon = 1$. Проколотая окрестность содержит точку из X. Пусть она x_1.

Возьмем $\varepsilon = \min\{\frac{1}{2}, |\, x_1 - a \,|\}$. Проколотая окрестность содержит точку из X. Пусть она x_2.

Возьмем $\varepsilon = \min\{\frac{1}{3}, |\, x_2 - a \,|\}$. Проколотая окрестность содержит точку из X. Пусть она x_3.

Делаем так дальше.

$|\, a - x_k \,| < \frac{1}{k}$

$a - \frac{1}{k} < x_k < a + \frac{1}{k}$.

Две штуки стремятся к a, значит $x_k \to a$.

□

Пример предельных точек.

1. (a, b)

   Множество предельных точек этого интервала – $[a, b]$ Ясно, что любая точка, принадлежащая интервалу – предельная. Точки на концах – тоже(любой интервал будет пересекать).

2. $(a, b) \cap \mathbb{Q}$.

   Множество предельных точек тоже $[a, b]$. (Т.к. в любой окрестности любой точки есть вещественные числа)

***Определение* 3.1.4** (предел функции в точке)**.**

$E \subset \mathbb{R}$

$f : E \to \mathbb{R}$, a– предельная точка множества E.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ (предел функции f в точке a), если

1. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in E \;\; \wedge 0 < |\, a - x \,| < \delta \implies |\, f(x) - A \,| < \varepsilon$

   (определение по Коши)

2. Для любой окрестности U_A точки A найдется проколотая окрестность $\dot{U}_a$ точки a, т.ч. $f(E \cap \dot{U}_a) \in U_A$.

   (определение на языке окрестностей)

3. Для любой последовательности $\{x_n\}$, т.ч. $a \neq x_n \in E \wedge \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \quad \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

   (определение по Гейну)

Утверждение 3.1.2. Определения по Коши и на языке окрестностей равносильны.

Доказательство. равносильности первых двух определений.

Заметим, что 1). $\iff$ 2)..

$\dot{U}_a = (a - \delta; a + \delta) \backslash \{a\}$

$x \in \dot{U}_a \iff 0 < |\, x - a \,| < \delta$

$x \in E \wedge 0 < |\, x - a \,| < \delta \iff x \in E \cap \dot{U}_a$

$U_A = (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.

$y \in U_A \iff |\, y - A \,| < \varepsilon$

$\forall x \in E \cap \dot{U}_a \implies f(x) \in U_A$

Итого это расшифровывается как:

$\forall x \in E \;\; 0 < |\, x - a \,| < \delta \implies |\, f(x) - A \,| < \varepsilon$

Т.е. эти два определение утверждают ровно одно и то же. □

Замечание.

Можем обобщить определение:

$A = +\infty \quad U_A = (p; +\infty)$

$A = -\infty \quad U_A = (-\infty; p)$

Свойства.

1. Предел – локальное свойство.

   Т.е. если есть две функции, совпадающие в некоторой окрестности точки, то пределы в этой точки у них одинаковые.

   Если f и $g : E \to \mathbb{R}$ и $f(x) = g(x)$ в некоторой $\dot{U}_a$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$, если один из них существует, или оба предела не существуют.

2. Значение функции в самой точке a не участвует в определении (нам все равно, какое оно).

3. Локальная ограниченность.

   Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$.

   Тогда $\exists\, U_a$, в которой f ограничена.

   Доказательство. Воспользуемся определением по Коши.

   $\varepsilon = 1 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \quad 0 < |\,x - a\,| < \delta \quad |\,f(x) - A\,| < 1 \implies |\,f(x)\,| \leqslant |\,A\,| + |\,f(x) - A\,| < |\,A\,| + 1$.

   Если $x \in E \cap U_a$, где $U_a = (a - \delta, a + \delta)$.

   Итого $|\,f(x)\,| \leqslant \max\{|\,A\,| + 1, |\,f(a)\,|\}$ □

   Замечание. А вот глобальной ограниченности может не быть.

   $f(x) = \frac{1}{x} \quad E = (0; +\infty)$

   $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$, но глобальной ограниченности нет. Близко походим к нулю – $\frac{1}{x}$ становится очень большой.

4. Для того, чтобы в определении по Гейне существовал предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ достаточно, чтобы для любой последовательности $a \neq x_n \in E \;:\; \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ существовал $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$. (совпадение этих пределов для разных последовательностей требовать не обязательно.)

   Доказательство. Предположим, что есть две последовательности, у которых получаются разные пределы.

   Пусть $a \neq x_n \in E \quad \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \implies \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$

   $a \neq y_n \in E \quad \lim\limits_{n \to \infty} y_n = a \implies \lim\limits_{n \to \infty} f(y_n) = B$

   Покажем, что тогда $A = B$.

   $\{z_n\} : \quad x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, ...$

   Заметим, что $a \neq z_n \in E \quad \lim\limits_{n \to \infty} z_n = a \implies \lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = C$

   Тогда $f(x_n)$– просто подпоследовательность для последовательности $f(z_n) \implies \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) =$

   $= C \implies A = C$.

   Аналогично $B = C$.

   А значит, $A = B$. □

Теорема 3.1.3. Определения по Коши и по Гейне равносильны.

Более того, в определении по Гейне можно ограничиться лишь монотонными последовательностями $\{x_n\}$.

Доказательство.

Коши $\implies$ Гейне.

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in E \wedge 0 < |\,x - a\,| < \delta \implies |\,f(x) - A\,| < \varepsilon$

Рассмотрим произвольную последовательность $a \neq x_n \in E$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и докажем для нее, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и по нему возьмем $\delta > 0$ из определения по Коши.

$\exists N\ \forall n \geqslant N\ \ |\,x_n - a\,| < \delta$.

Покажем, что при $n \geqslant N\ \ |\,f(x_n) - A\,| < \varepsilon$.

Если $n \geqslant N\ \ |\,x_n - a\,| < \delta\ \ a \neq x_n \in E$

$\implies x_n \in E \wedge 0 < |\,x_n - a\,| < \delta$

$\implies |\,f(x_n) - A\,| < \varepsilon$.

А это мы и хотели.

Теперь покажем, что Гейне $\implies$ Коши.

Ограничимся, кстати, только монотонными последовательностями.

Предположим, что определение по Коши не выполняется, т.е.

$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x \in E \wedge 0 < |\,x - a\,| < \delta$ и т.ч. $|\,f(x) - A\,| \geqslant \varepsilon$.

Зафиксируем это ε.

Подставим $\delta = 1$. Тогда $\exists x \in E\ \ x \neq a\ \ |\,x - a\,| < 1 \wedge |\,f(x) - A\,| \geqslant \varepsilon$. Назовем его x_1.

Подставим $\delta_2 = \min\{\frac{1}{2}, |\,x_1 - a\,|\} > 0$. Тогда $\exists x \in E\ \ x \neq a\ \ |\,x - a\,| < \delta_2 \wedge |\,f(x) - A\,| \geqslant \varepsilon$. Назовем его x_2. Тогда заметим, что $|\,x_2 - a\,| < |\,x_1 - a\,| \wedge |\,x_2 - a\,| < \frac{1}{2}$.

$\delta_3 = \min\{\frac{1}{3}, |\,x_2 - a\,|\} > 0$. Тогда $\exists x \in E\ \ x \neq a\ \ |\,x - a\,| < \delta_3 \wedge |\,f(x) - A\,| \geqslant \varepsilon$. Назовем его x_3. Тогда заметим, что $|\,x_3 - a\,| < |\,x_2 - a\,| \wedge |\,x_3 - a\,| < \frac{1}{3}$.

Продолжим так дальше. Что же получилось?

$|\,f(x_n) - A\,| \geqslant \varepsilon$ при всех n.

$|\,x_n - a\,| < \delta_n \leqslant \frac{1}{n} \implies x_n \to a$

$|\,x_1 - a\,| > |\,x_2 - a\,| > |\,x_3 - a\,| > \ldots$

Заметим, что вообще-то уже получили противоречие с определением по Гейне. Но мы еще обещали монотонность!

У нас точки приближаются к a, но по разные стороны. Хотя бы с одной стороны членов бесконечное количество. Выкинем все остальное.

Тогда $x_{n_k} \to a$ и x_{n_k} будет монотонна. $\square$

Упражнение. Понять, что определения по Гейне и на языке окрестностей для $A = \pm\infty$ и/или $a = \pm\infty$ равносильны.

Свойства (пределов)**.**

1. Предел единственен в $\overline{\mathbb{R}}$

   Доказательство. От противного.

   Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A\quad \lim\limits_{x\to a} f(x) = B$.

   Поскольку a– предельная точка E, то существуют $a \neq x_n \in E$, т.ч. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$\implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = B.$

По единственности предела последовательностей получаем, что $A = B$. $\square$

2. Стабилизация знака.

   $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}}\backslash\{0\}$

   Тогда $\exists \dot{U}_a$, т.ч. при $x \in \dot{U}_a \cap E$ у чисел $f(x)$ и A одинаковый знак.

   Доказательство. Возьмем $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$, $U_A = (A-\varepsilon; A+\varepsilon)$(от 1 до $+\infty$, если A – бесконечность)

   $\exists \dot{U}_a$, т.ч. $f(\dot{U}_a \cap E) \subset U_A$.

   А в U_A лежит A и все числа одного знака.

   $\implies \forall x \in \dot{U}_a \cap E \quad f(x)$ и A одного знака. $\square$

Теорема 3.1.4 (об арифметических действиях с пределами)**.**

$f, g : E \to \mathbb{R}$, $a-$ предельная точка E и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$

Тогда

1. $\lim(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
2. $\lim f(x)g(x) = AB$
3. $\lim cf(x) = cA$
4. Если $B \neq 0$, то $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ ($\frac{f(x)}{g(x)}$ определено лишь в некоторой окрестности точки a).

Доказательство.

1. Берем $a \neq x_n \in E$, т.ч. $\lim x_n = a$.

   $\implies \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = B.$

   $\implies \lim\limits_{n\to\infty} (f(x_n) + g(x_n)) = A + B$

   $\implies \lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B.$

   Все остальное аналогично.

2. Поскольку $B \neq 0$, $g(x)$ имеет тот же знак, что и B в некоторой окрестности точки a. А значит, $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a. И далее как в пункте 1) с определением по Гейне.

$\square$

Оговорка – все эти свойства можем писать и для бесконечностей в тех же случаях, что и с последовательностями.

Теорема 3.1.5 (Предельный переход в неравенстве.)**.** $f, g : E \to \mathbb{R}, a-$ предельная точка E и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ и $f(x) \leqslant g(x)$ при $x \in E$.

Тогда $A \leqslant B$.

Доказательство.

Берем $a \neq x_n \in E$,т.ч. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

$\implies \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A, \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = B \quad f(x_n) \leqslant g(x_n)$

Тогда по теореме из последовательностей $A \leqslant B$. □

Замечание. Достаточно выполнения неравенства $f(x) \leqslant g(x)$ при $x \in E \cap \dot{U}_a$.

Теорема 3.1.6 (о двух милиционерах)**.**

$f, g, h : E \to \mathbb{R}, a-$ предельная точка E.

$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ при $x \in E$.

и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Тогда $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Доказательство.

$a-$ предельная точка из $E \implies$ найдется $a \neq x_n \in E$, т.ч. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Возьмем любую такую последовательность.

Тогда $f(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant h(x_n)$.

Еще мы знаем, что $f(x_n), h(x_n) \to A$.

Пользуясь теоремами про последовательности получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = A \implies \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$. □

***Определение* 3.1.5.** Односторонние пределы.

$f : E \to \mathbb{R} \quad a$

$E_1 = (-\infty, a) \cap E \quad f_1 = f|_{E_1}-$ сужение на множество. Пусть a – предельная точка для E_1.

Если $A = \lim\limits_{x\to a} f_1(x)$, то $A = \lim\limits_{x\to a-} f(x)$ (левый предел)

$E_2 = (a, +\infty) \cap E \quad f_2 = f|_{E_2}-$ сужение на множество. Пусть a – предельная точка для E_2.

Если $B = \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, то $B = \lim\limits_{x\to a+} f(x)$ (правый предел)

Пример.

$f(x) = [x]$ – целая часть.

$\lim\limits_{x\to n+} [x] = n$

$\lim\limits_{x\to n-} [x] = n - 1$

Попереписываем всякие определения: Перепишем определение левого предела с помощью $\varepsilon - \delta$.

$A = \lim\limits_{x\to a-} f(x)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in E_1 \ : 0 < |\, x - a \,| < \delta \implies |\, f(x) - A \,| < \varepsilon$

Это означает:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in E \ : a - \delta < x < a \implies |\, f(x) - A \,| < \varepsilon$

Аналогично $B = \lim\limits_{x\to a+} f(x)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in E \ : a < x < a + \delta \implies |\, f(x) - A \,| < \varepsilon$

Осознаем, как будет выглядеть определение по Гейне.

$A = \lim\limits_{x\to a-} f(x)$.

$\forall$ последовательности $\{x_n\}$, что $a \neq x_n \in E$ и $\{x_n\}$ монотонно возрастает, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

$B = \lim\limits_{x\to a-} f(x)$.

$\forall$ последовательности $\{x_n\}$, что $a \neq x_n \in E$ и $\{x_n\}$ монотонно убывает, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = B$.

***Определение* 3.1.6.**

$f : E \to \mathbb{R}$

f монотонно возрастает, если $\forall x, y \in E \quad : x < y \implies f(x) \leqslant f(y)$

f строго монотонно возрастает, если $\forall x, y \in E \quad : x < y \implies f(x) < f(y)$

f монотонно убывает, если $\forall x, y \in E \quad : x < y \implies f(x) \geqslant f(y)$

f строго монотонно убывает, если $\forall x, y \in E \quad : x < y \implies f(x) > f(y)$

Замечание. Если $E = \mathbb{N}$, то это определение монотонности для последовательности $x_n = f(n)$.

Теорема 3.1.7.

$f : E \to \mathbb{R}, a$ – предельная точка $E \cap (-\infty, a)$.

1. Если f монотонно возрастает и ограничена сверху, то существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$.
2. Если f монотонно убывает и ограничена снизу, то существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$.
3. Если f монотонно возрастает и не ограничена сверху, то $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = +\infty$.
4. Если f монотонно убывает и не ограничена снизу, то $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = -\infty$.

Доказательство.

1. Рассмотрим $a \neq x_n \in E$ монотонно возрастающую последовательность, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

   Тогда $f(x_n)$ – монотонно возрастающая последовательность. (т.к. $x_n \leqslant x_{n+1}$, а функция монотонно возрастающая)

   Если f ограничена сверху, то $\forall x \in E \;\; f(x) \leqslant M \implies f(x_n) \leqslant M \;\; \forall n$.

   А значит, $f(x_n)$– монотонно возрастающая ограниченная сверху последовательность. $\implies$ существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

   Тогда все эти пределы равны между собой.

   Упражнение. Почему для монотонных последовательностей в Гейне факт “достаточно лишь, чтобы предел был” тоже верен.

3. $a \neq x_n \in E$ монотонно возрастающая последовательность, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

   $\implies f(x_n)$ монотонно возрастает.

   $\implies \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ конечный или бесконечный.

   $\implies$ все пределы равны.

Предъявим теперь последовательность такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} = +\infty$.

f неограничена сверху на $E \cap (-\infty, a)$

$\implies \exists x_1 \in E \cap (-\infty, a)$, т.ч. $f(x_1) > 1$.

$\max\{2, f(x_1)\}$ тоже не является верхней границей. $\implies \exists x_2 \in E \cap (-\infty, a)$, т.ч. $f(x_2) > \max\{2, f(x_1)\}$

Заметим, что тогда $x_2 > x_1$

$\max\{3, f(x_2)\}$ тоже не является верхней границей. $\implies \exists x_3 \in E \cap (-\infty, a)$, т.ч. $f(x_3) > \max\{3, f(x_2)\}$

Заметим, что тогда $x_3 > x_2$

В результате получили последовательность $x_1 < x_2 < x_3 < ...$ и $f(x_k) > k \implies \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$

Объяснение, почему $\{x_n\}$ стремится к a:

Существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то если это $b < a$, то $f(x_n) \leqslant f(b) \implies$ ограничена.

$\square$

Теорема 3.1.8 (Критерий Коши для предела функций.)**.** Существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x, y \in E : 0 < |\, x - a\,| < \delta, 0 < |\, y - a\,| < \delta \implies |\, f(x) - f(y)\,| < \varepsilon$.

Доказательство.

Докажем “ $\implies$ ”.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Напишем определение:

$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0\ \forall x \in E\ \ : 0 < |\, x - a\,| < \delta \implies |\, f(x) - A\,| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall y \in E\ \ : 0 < |\, y - a\,| < \delta \implies |\, f(y) - A\,| < \frac{\varepsilon}{2}$

Тогда $\forall x, y \in E\ \ : 0 < |\, x - a\,| < \delta, 0 < |\, y - a\,| < \delta \implies |\, f(x) - f(y)\,| \leqslant |\, f(x) - A\,| + |\, f(y) - A\,| < \varepsilon$. Что нам и требовалось.

Докажем в обратную сторону. Будем проверять по определению Гейне.

Возьмем $a \neq x_n \in E$, т.ч. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

$\forall\delta > 0\ \exists N\ \forall n \geqslant N\ \ 0 < |\, x_n - a\,| < \delta$

$\implies$ найдется N, начиная с которого верно $x_n \in E \wedge 0 < |\, x_n - a\,| < \delta$.

$\implies \forall m, n \geqslant N\ \ |\, f(x_n) - f(x_m)\,| < \varepsilon$

Получили определение фундаментальной последовательности. Значит, у нее есть конечный предел. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

Получаем, что по Гейне есть предел у функции в точке.

Критерий Коши доказан. $\square$

3.2. §2 Непрерывные функции.

***Определение* 3.2.1.**

$f : E \to \mathbb{R}\ \ \ a \in E$.

f непрерывна в точке a, если:

1. $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in E$ и $|\, x - a \,| < \delta \implies |\, f(x) - f(a) \,| < \varepsilon$
2. $\forall U_{f(a)}$– окрестность точки a $\exists U_a$– окрестность точки a, т.ч. $f(U_0 \cap E) \subset U_{f(a)}$
3. Если a– предельная точка множества E, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

   Если a– не предельная точка, то всегда непрерывна в точке.
4. Для любой последовательности $x_n \in E$, т.ч. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \implies \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$.

Утверждение 3.2.1. Все 4 определения равносильны.

Доказательство.

Очевидно, что 1. и 2. – одно и то же(см. выше)

Покажем, что 2. и 3. – одно и то же.

Если a– предельная точка E $\quad \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

$\forall U_{f(a)} \ \ \exists \dot{U}_a \ \ f(E \cap \dot{U}_a) \subset U_{f(a)}$

Заметим, что $f(a) \in U_{f(a)}$, а значит проколотость ни на что не влияет.

Если a– не предельная (.) E.

$\implies \exists \dot{U}_a$, т.ч. $\dot{U}_a \cap E = \varnothing \quad U_a \cap E = \{a\}$

$\{f(a)\} = f(a) = f(U_a \cap E) \subset U_{f(a)}$

Покажем, что 3. и 4. – одно и тоже.

Если точка не предельная, то говорим о пустых множествах, неинтересно.

Если точка предельная $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \iff$ определение по Гейне.

$\forall x_n \in E \quad \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \implies \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$.

Заметим, что если втыкать в последовательность члены, равные пределу, то предел не испортится. $\square$

Пример.

1. $f(x) = c$.

   $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall |\, x - a \,| < \delta \implies |\, f(x) - f(a) \,| = 0 < \varepsilon$.

   Подходит любое δ.
2. $f(x) = x$

   $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall |\, x - a \,| < \delta \implies |\, f(x) - f(a) \,| < \varepsilon$.

   Подходит $\delta = \varepsilon$.
3. $f(x) = [x]$

   $a \in \mathbb{Z}$

   Поймем, что тут нет непрерывности.

   Какую бы не взяли окрестность точки a, есть x такой, что $f(x) = a - 1$. Тогда $|\, f(x) - f(a) \,| = |\, a - (a-1) \,| = 1$.

   Тогда для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ определение не выполнено.

Упражнение. $f(x) = \left|\, \{x\} - \frac{1}{2} \,\right|$ понять все про непрерывность.

Теорема 3.2.2 (об арифметический действиях с непрерывными функциями)**.** $f, g : E \to \mathbb{R} \quad a \in E$.

f, g непрерывны в (.) a. Тогда:

1. $f \pm g$ непрерывна в (.) a
2. fg непрерывна в (.) a
3. cf непрерывна в (.) a
4. $|\, f\,|$ непрерывна в (.) a
5. Если $g(a) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ непрерывна в (.) a

Доказательство.

Если a– предельная точка E, то все утверждения – это утверждения про пределы функций.

Если a– не предельная, то надо проверить про 1 точку. □

Следствие.

1. Многочлены непрерывны во всех точках.
2. Рациональные функции (отношение двух многочленов) непрерывны во всех точках, в которых знаменатель не обращается в 0.

Доказательство.

1. $f(x) = x$– непрерывна во всех точках.

   $x^k = x \cdot x \cdot x ...$– непрерывны во всех точках.

   $a_k x^k$ – непрерывны во всех точках.

   $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ – непрерывна во всех точках.
2. $P(x), Q(x)$– многочлены, непрерывны во всех точках.

   Если $Q(x) \neq 0$, то по пункту 5 $\frac{P}{Q}$ непрерывны во всех не 0.

□

Теорема 3.2.3 (О стабилизации знака)**.**

$f : E \to \mathbb{R} \quad a \in E \quad f$ – непрерывна в (.) a и $f(a) \neq 0$. Тогда найдется окрестность U точки a, т.ч. $\forall x \in U \cap E \quad f(x)$ и $f(a)$ одного знака.

Доказательство.

Пусть $f(a) > 0 \implies \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) > 0$.

$\varepsilon = \frac{f(a)}{2} \quad \exists \delta > 0$, т.ч. $\forall x \in E \quad |\, x - a\,| < \delta \implies |\, f(x) - f(a)\,| < \varepsilon$.

$\implies f(x) > \frac{f(a)}{2} > 0$ в $U = (a - \delta, a + \delta)$. □

Теорема 3.2.4 (Непрерывность композиции)**.**

$f : E \to \mathbb{R}, g : D \to \mathbb{R} \;\; f(E) \subset D$

$a \in E$

f – непрерывна в (.) a, g непрерывна в (.) $f(a)$

Тогда $g \circ f(x) = g(f(x))$ – непрерывна в точке a.

Доказательство.

Если a – не предельная точка, то говорить не о чем.

Если a – предельная точка, то

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

$\lim\limits_{y \to f(a)} g(y) = g(f(x))$.

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall y \in D$ и $|\, y - f(a) \,| < \delta \implies |\, g(y) - g(f(a)) \,| < \varepsilon$.

$\forall \delta > 0 \;\; \exists \gamma > 0 \;\; \forall x \in E \;\;\; |\, x - a \,| < \gamma \implies |\, f(x) - f(a) \,| < \delta$.

$y = f(x) \in D \;\;\; |\, y - f(a) \,| < \delta$

$\implies |\, f(y) - g(f(a)) \,| < \varepsilon \; (g(f(x)) - g(y))$.

Получаем, что

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in E \;\;\; |\, x - a \,| < \gamma \implies |\, g(f(x)) - g(f(a)) < \varepsilon \,|$.

А это и есть непрерывность $g \circ f$ в точке a. □

Замечание.

Для пределов утверждение неверно. (Чтобы было верно, нужна непрерывность внешней функции)

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y = 0 \\ 1 & \text{при } y \neq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \quad \lim\limits_{y \to 0} g(y) = 1$

НО.

$\lim\limits_{x \to 0} g(f(x))$ не существует, ибо есть две последовательности с разными пределами:

$x_n = \frac{1}{\pi n} \implies g(f(x_n)) = 0$

$x_n = \frac{1}{\pi n + \frac{\pi}{2}} \implies g(f(x_n)) = 1$

Если же g непрерывна в точке b, а $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, то $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = g(b)$.

Доказательство.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ b & x = a \end{cases}.$$

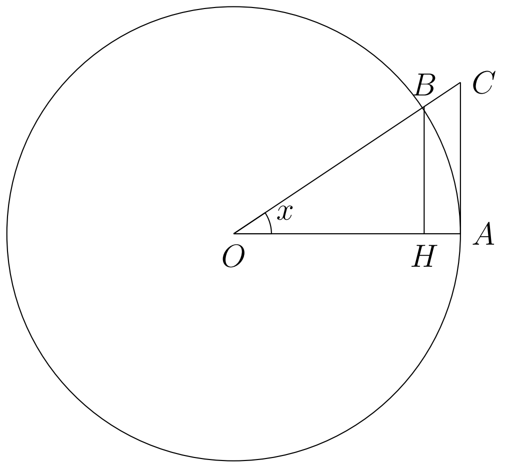
Тогда $g \circ \tilde{f}(x)$ непрерывна в точке a.

$\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = \lim\limits_{x \to a} g(\tilde{f}(x)) = g(\tilde{f}(a)) = g(b)$ □

Теорема 3.2.5.

Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x < x < \tan x$.

Доказательство.



Пусть окружность радиуса 1.
$\sin x = BH$
$\tan x = AC$
$S(\triangle OBA) = \frac{1}{2}BH \cdot OA = \frac{\sin x}{2}$
$S(\triangle OCA) = \frac{1}{2}CA \cdot OA = \frac{\tan x}{2}$
$S(\text{сектора } OBA) = \frac{x}{2}$
$S(\triangle OBA) < S(\text{сектора } OBA) < S(\triangle OCA)$
$\implies \sin x < x < \tan x$

□

Следствие.

1. $|\sin x| < |x| \quad \forall x \neq 0$

   Доказательство.
   $x \in (0; \frac{\pi}{2}) \implies 0 < \sin x < x \implies |\sin x| < |x|$
   $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0) \quad |\sin x| = \sin(-x) < -x - |x|$
   $|x| \geqslant \frac{\pi}{2} \implies |\sin x| \leqslant 1 < \frac{\pi}{2} \leqslant |x|$ □

2. $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$
   $|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|$

   Доказательство.
   $|\sin x - \sin y| = 2\left|\sin \frac{x-y}{2}\right|\left|\cos \frac{x+y}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin \frac{x-y}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x-y}{2}\right| = |x - y|$
   С косинусами – аналогично. □

Теорема 3.2.6.

1. sin и cos непрерывны на $\mathbb{R}$.
2. tan и cot непрерывна на всем множестве определения.

Доказательство.

1. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \varepsilon \;\; \forall |x - a| < \delta \implies |\sin x - \sin a| \leqslant |x - a| < \delta = \varepsilon$.
2. По теореме об отношении непрерывных функций.

□

Теорема 3.2.7 (Вейерштрасса)**.**
$f : [a; b] \to \mathbb{R}$ и f непрерывна во всех точках $[a, b]$. Тогда

1. f ограниченная функция
2. f принимает наименьшее и наибольшее значение

Доказательство.

1. Предположим противное.

   Тогда.

   $\exists x_1 \in [a,b] \quad |\, f(x_1)\,| > 1$

   $\exists x_2 \in [a,b] \quad |\, f(x_2)\,| > 2$

   ...

   $\exists x_n \in [a,b] \quad |\, f(x_n)\,| > n$

   Выберем по теореме Больцано-Вейерштрасса сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to c$.

   $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b \implies a \leqslant c \leqslant b$.

   $\implies c \in [a,b] \implies f$ непрерывна в точке c.

   $\implies \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c) \in \mathbb{R}$

   Значит,

   $f(x_{n_k})$ – ограниченная последовательность.

   Но мы знаем, что $|\, f(x_{n_k})\,| > n_k \geqslant k \implies |\, f(x_n)\,| \to \infty$.

2. $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) < +\infty$ по пункту 1.

   Тогда $g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$ – непрерывная на $[a,b]$ функция.

   Применяем первый пункт теоремы к функции g.

   $\implies g$ ограничена сверху. $\implies$ найдется такая точка M_1, что $\frac{1}{M-f(x)} = g(x) \leqslant M_1$ при $x \in [a,b]$.

   $\implies \frac{1}{M_1} \leqslant M - f(x) \implies f(x) \leqslant M - \frac{1}{M_1} < M$. Заметим, что получили новую верхнюю границу, меньшую M. Получили противоречие. Значит, максимум достигается.

□

Пример.

1. Существенно, что функция задана на отрезке.

   $f(x) = \frac{1}{x}$ $f : (0;1] \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, но неограниченная сверху.

2. Непрерывность на всем отрезке тоже существенна.

   $$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x} & x \in (0;1] \end{cases}$$

   Тогда $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ – непрерывна во всех точках кроме 0. Но не ограничена сверху.

Теорема 3.2.8 (Больцано-Коши)**.** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

f непрерывна во всех точках $[a,b]$.

1. Если $f(a)$ и $f(b)$ противоположных знаков, то существует $c \in (a,b)$, т.ч. $f(c) = 0$.

2. Если C лежит между $f(a)$ и $f(b)$, то существует $c \in [a, b]$, т.ч. $f(c) = C$.

Доказательство.

1. Пусть $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.

   Если $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, то нужное c найдено.

   Если $\neq 0$.

   Если $f(\frac{a+b}{2}) > 0$, то $[a_1, b_1] = [a, \frac{a+b}{2}]$

   Если $f(\frac{a+b}{2}) < 0$, то $[a_1, b_1] = [\frac{a+b}{2}, b]$.

   Проделаем эту процедуру снова.

   Получится вложенная последовательность отрезков.

   $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset ...$

   $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$

   $f(a_n) < 0 < f(b_n)$.

   Воспользуемся теоремой о стягивающихся отрезках.

   По ней найдется такая c, т.ч. $c \in [a_n, b_n]$ при всех n.

   Причем $a_n \to c \;\; b_n \to c$.

   Вспомним, что f непрерывна в (.) c.

   $\implies \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$

   $f(a_n) < 0 \;\; f(a_n) \to f(c) \implies f(c) \leqslant 0$.

   $0 < f(b_n) \to f(c) \implies f(c) \geqslant 0$.

   А значит, $f(c) = 0 \implies$ нужная точка найдена.

2. $g(x) = f(x) - C$, тогда значения функции g на концах отрезка $[a, b]$ противоположных знаков.

   $\implies \exists c \;\; g(c) = 0 \;\; g(c) = f(c) - C \implies f(c) = C$.

□

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \\ -1 & x \in [-1; 0) \end{cases}$$

Непрерывна во всех точках, кроме 0. Для нее Вейерштрасс не работает.

Теорема 3.2.9.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна во всех (.)

Тогда $f([a, b])$ – отрезок (возможно, вырожденный в точку)

Доказательство. По теореме Вейерштрасса

$\exists p, q \in [a, b]$, т.ч. $f(p) \leqslant f(a) \leqslant f(q) \;\; \forall x \in [a, b]$.

Тогда $f([a, b]) \subset [f(p), f(q)]$.

Поймем, что имеет место равенство.

Возьмем $y \in (f(p), f(q))$. Тогда по второй части теоремы Больцано-Коши для отрезка $[p, q]$ найдется $c \in (p, q) \;\; f(c) = y$.

Заметим, что $c \in [a, b]$. Тогда $y \in f([a, b])$.

□

Теорема 3.2.10.

Непрерывный образ промежутка – промежуток (возможно, другого типа).

$[a, b] \;\; (a, b) \;\; [a, b) \;\; (a, b]$

Будем обозначать $< a, b >$, если неважно, какой именно промежуток.

Доказательство.

$m = \inf\limits_{x \in <a,b>} f(x) \;\; M = \sup\limits_{x \in <a,b>} f(x)$

$\implies m \leqslant f(x) \leqslant M \;\; \forall x \in < a, b >$.

Докажем, что если $y \in (m, M)$, то $y = f(c)$ для некоторой $c \in < a, b >$.

$m < f(p) < y < f(q) < M$.

Тогда применим снова теорему Больцано-Коши для отрезка $[p, q]$.

$\implies \exists c \in (p, q) \;\; f(c) = y$

$\implies c \in < a, b > \implies y \in f(< a, b >)$

$\implies (m, M) \subset f(< a, b >) \subset [m, M]$.

А значит, $f(< a, b >)$ промежуток. □

Упражнение. Придумать примеры всех возможных типов.

***Определение* 3.2.2.**

$f : X \to Y$ – биекция.

Тогда $f^{-1} : Y \to X \;\; f^{-1}(f(x)) = x \;\; \forall x \in X$ – функция, обратная к f.

Замечание. $f(f^{-1}(x)) = y \;\; \forall t \in Y$

Теорема 3.2.11.

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ непрерывна и строго монотонная.

$m := \inf\limits_{x \in \langle a,b\rangle} f(x) \;\; M := \sup\limits_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$

Тогда $\exists f^{-1} \; : \; \langle m, M\rangle \to \mathbb{R}$, обратная к f. И обладает следующими свойствами:

1. f^{-1} обратная к $f : \langle a, b\rangle \to \langle m, M\rangle$
2. f^{-1} строго монотонная
3. f^{-1} непрерывна на $\langle m, M\rangle$

Доказательство.

Пусть для определенности $f \;\; \uparrow$

$f : \langle a, b\rangle \to \langle m, M\rangle$ – значения функции на $\langle a, b\rangle$

1. Если $x < y$, то $f(x) < f(y) \implies f$ – инъективна

$\implies f$ – биекция между $\langle a, b\rangle$ и $\langle m, M\rangle$

$\implies$ существует обратная к $f^{-1} : \langle m, M\rangle \to \langle a, b\rangle$

2. $x < y \implies f(x) < f(y)$

   $x = y \implies f(x) = f(y)$

   $x > y \implies f(x) > f(y)$

   А значит, $x < y \iff f(x) < f(y)$

   $f^{-1}(x) < f^{-1}(y) \iff f(f^{-1}(x)) < f(f^{-1}(y)) \iff x < y$

   $\implies$ обратная функция строго монотонна.

3. Возьмем $y_0 \in \langle m, M\rangle$ и докажем, что f^{-1} непрерывна в (.) y_0

   $A := \sup\limits_{y<y_0} f^{-1}(y) = \lim\limits_{y\to y_0-} f^{-1}(y) \leqslant f^{-1}(y_0) \leqslant \lim\limits_{y\to y_0+} f^{-1}(y) = \inf\limits_{y>y_0} f^{-1}(y) =: B$

   $f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0)$

   Надо доказать, что $A = B = f^{-1}(y_0)$

   Пусть $A < B$.

   Посмотрим на $f^{-1}(\langle m, M\rangle) = f^{-1}(\langle m, y_0)) \cup \{f^{-1}(y_0)\} \cup f^{-1}((y_0, M\rangle)$

   $\implies f^{-1}(\langle m, M\rangle) \subset (-\infty, A] \cup \{f^{-1}(y_0)\} \cup [B, +\infty)$

   Однако, если $A < B$, то получаем, что есть промежутки, на которых f^{-1} не определена. Однако мы знаем, как она там устроена.

   Получили противоречие, значит $A = B$, значит все пределы равны значению функции в точке, т.е. функция непрерывна.

□

Замечание.

Чтобы получить график обратной функции, достаточно отразить его относительно прямой $y = x$.

Следствие. $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1] \uparrow$

$\implies$ существует непрерывная обратная.

Это $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1] \downarrow$

$\implies$ существует непрерывная обратная.

Это $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$

Дополнить с арктангенсами-арккотангенсами.

Теорема 3.2.12. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Доказательство.

$\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$ при $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\frac{\sin x}{x} \leqslant 1 \leqslant \frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$

$\cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$ из-за четности функций есть при $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\cos 0 = 1$

$\implies$ (по теореме о двух милиционерах) $\frac{\sin x}{x} \to 1$ при $x \to 0$

□

3.3. §3. Элементарные функции

3.3.1. Определение показательной и степенной функции.

***Определение* 3.3.1.** Степенная функция для рационального показателя.

$x^n, n \in \mathbb{N}$ – перемножили n раз x.

$x^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и непрерывна.

Если n – нечетно, то $x^n \uparrow$ на $\mathbb{R}$

Если n – четно, то $x^n \uparrow$ на $[0, +\infty)$

$\implies$ Существует обратные функции $\sqrt[n]{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, если $n \not\vdots\, 2$

$\sqrt[n]{x} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, если $n \vdots\, 2$

И эта функция строго монотонно возрастает и непрерывна.

$x^{\frac{p}{q}} := (\sqrt[q]{x})^p$,($p/q$ не сократима) если q – нечетно, то $x^{p/q}$ задана на $\mathbb{R}$. Если q – четно, то $x^{p/q}$ задана на $[0, +\infty)$.

$x^{-r} := \frac{1}{x^r}$ – непрерывна на всей области определения ($\mathbb{R} \backslash \{0\}$ или $(0, +\infty)$).

Хотим определить показательную функцию $a > 0$.

a^x. Уже умеем определять в рациональных степенях.

Свойства. $r, s \in \mathbb{Q}$

- $r < s$ $\ a^r < a^s$ при $a > 1$ и наоборот при $a < 1$.
- $a^r a^s = a^{r+s}$
- $(a^r)^s = a^r s$
- $(ab)^r = a^r \cdot b^r$

Научимся переходить от рационального показателя в вещественный...

Лемма. Если $a > 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$

Доказательство.

$b_n = a^{\frac{1}{n}} - 1 \to 0$ – хотим показать.

$a^{\frac{1}{n}} + b_n + 1$

$\implies a = (1 + b_n)^n \geqslant 1 + nb_n > nb_n$

$\implies b_n < \frac{a}{n}$

Пусть $a > 1$, тогда $b_n > 0$.

Тогда $0 < b_n < \frac{a}{n} \to 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

Пусть $a < 1$, тогда $a^{1/n} = \frac{1}{(\frac{1}{a})^{1/n}}$. По доказанному, $(\frac{1}{a})^{1/n} \to 1$

Тогда и $a^{1/n} \to 1$. □

Теорема 3.3.1. Пусть $a > 0$ и $x \in \mathbb{R}$.

Если $x_n \in \mathbb{Q}$, т.ч. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, то последовательность a^{x_n} имеет конечный предел, зависящий лишь от x, но не от $\{x_n\}$.

Доказательство.

Шаг 1. Существование предела.

Проверим, что последовательность a^{x_n} – фундаментальна.

$x_n \to x \implies x_n$ – ограничена $\implies |\, x_n \,| \leqslant M$

$\implies 0 < a^{x_n} \leqslant \max\{a^M, (\frac{1}{a})^M\}\;\; a^{x_n} \in (0, c]$.

$|\, a^{x_n} - a^{x_m} \,| = a^{x_m} \,|\, a^{x_n - x_m} - 1 \,| \leqslant C \,|\, a^{x_n - x_m} \,|$

Пусть $x_n > x_m$

Подставим $\varepsilon > 0$ в лемму $\exists N \;\; \forall k > N \;\; \left| a^{1/k} - 1 \right| < \varepsilon$.

Пусть $a > 1$. Т.к. x_n – сходящаяся последовательность, то она фундаментальная, то $\exists N_1 \;\; \forall m, n > N_1 \,|\, x_n - x_m \,| < \frac{1}{k}$

$|\, a^{x_n} - a^{x_m} \,| \leqslant C \,|\, a^{x_n - x_m} - 1 \,| = C(a^{x_n - x_m} - 1) \leqslant C(a^{1/k} - 1) < C\varepsilon$

Пусть $a < 1$. Т.к. x_n – сходящаяся последовательность, то она фундаментальная, то $\exists N_1 \;\; \forall m, n > N_1 \,|\, x_n - x_m \,| < \frac{1}{k}$

$|\, a^{x_n} - a^{x_m} \,| \leqslant C \,|\, a^{x_n - x_m} - 1 \,| = C((\frac{1}{a})^{x_m - x_x} - 1) \leqslant C((\frac{1}{a})^{1/k} - 1) < C\varepsilon$

Итак. Поняли, что предел существует.

Шаг 2. Единственность. Пусть $x_n \to x, y_n \to x$ $(x_n, y_n \in \mathbb{Q})$.

Пусть $a^{x_n} \to A, a^{y_n} \to B$. Покажем, что $A = B$.

Тогда $x_1, y_1, x_2, y_2, ... \to x \implies a^{x_1}, a^{y_1}, ...$ имеет предел C.

Но т.к. x_n подпоследовательность, то $A = C$.

Но т.к. y_n подпоследовательность, то $B = C$.

$\implies A = B$.

□

***Определение* 3.3.2.** Получившийся в теореме предел есть a^x.

Поймем, что все свойства из рациональных показателей сохраняются.

Свойства.

1. $x < y \;\; a^x < a^y$ при $a > 1$, иначе наоборот.
2. $a^x a^y = a^{x+y}$
3. $(a^x)^y = a^x y$
4. $(ab)^x = a^x \cdot b^x$

Доказательство.

1. $x < y$

   Пусть $u, v \in \mathbb{Q}$ такие, что $x < u < v < y$.

   $u > x_n \to x \;\; v < y_n \to y$.

   Пусть $a > 1 \;\; a^{x_n} < a^u < a^v < a^{y_n}$

   Перейдя к пределу, получаем $a^x \leqslant a^u < a^v \leqslant a^y$.

2. Пусть $x_n \to x, y_n \to y$. Тогда $a^{x_n}a^{y_n} = a^{x_n+y_n}$.

   Дальше по теореме об арифметических действиях $x_n + y_n \to x + y$

   $\implies a^x a^y = a^{x+y}$.

3. Пусть $y \in \mathbb{Q}$ и $x_n \to x \quad x_n y \to xy$

   $(a^{x_n})^y = a^{x_n y}$

   $(a_n^x)^y \to (a^x)^y, a^{x_n y} \to a^x y$ по непрерывности степенной функции с рациональным показателем.

   Если $x \in \mathbb{Q}$, то равенство так же есть.

   Пусть $x, y \in \mathbb{R} \;\; y_n \in \mathbb{Q} \;\; y_n \to y$

   $(a^x)^{y_n} = a^{xy_n}$

   Заметим, что с левой частью равенства все хорошо. Пока что воспользуемся непрерывностью, которую вскоре докажем.

4. $x_n \to x \quad a^{x_n} \to a^x, b^{x_n} \to b^x, (ab)^{x_n} \to (ab)^x$.

$\square$

Лемма. $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$.

Доказательство. Покажем для $a > 1$.

Если $|\, x \,| < \frac{1}{n}$, то $(\frac{1}{a})^{1/n} = a^{-1/n} < a^x < a^{1/n}$

$0 < a^x - 1 < a^{1/n} - 1$

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n > N \;\; a^{1/n} - 1 < \varepsilon$

По ε выбираем n, для которого $a^{1/n} - 1 < \varepsilon$

И тогда $\forall x \; : \; |\, x \,| < \frac{1}{n} \;\; 0 < a^x - 1 < a^{1/n} - 1 < \varepsilon$

Для $a < 1$ через отношение $\frac{1}{a}$. $\square$

Теорема 3.3.2. $a > 0 \implies a^x$ – непрерывна на $\mathbb{R}$

Доказательство. Надо доказать, что если $x \to x_0$, то $a^x \to a^{x_0}$.

$a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1)$.

Второй множитель стремится к нулю по лемме, а первый – просто константа. $\square$