

Математический анализ

Ермилов Антон, Никифоровская Анна

9 ноября 2016 г.

Содержание

1. Введение.	1
1.1 Множества.	1
1.2 Отношения.	2
1.3 Вещественные числа	3
1.3.1 Понятие вещественных чисел	3
1.3.2 Принцип математической индукции	4
1.3.3 Принцип Архимеда	5
1.4 Верхняя и нижняя границы	6
1.5 Теорема о вложенных отрезках	7
2. Последовательности вещественных чисел	8
2.1 §3 Число e	8
2.2 §4. Подпоследовательности	11
2.3 §5 Ряды.	18
3. Предел и непрерывность функций	21
3.1 §1 Предел функций.	21
3.2 §2 Непрерывные функции.	28

1. Введение.

1.1. Множества.

Определение 1.1.1. Множество — набор уникальных элементов.

$A \subset B$ (A — подмножество B , $\forall a \in A \Rightarrow a \in B$).

$A \subset B \iff B \supset A$

$A = B \iff A \subset B$ and $B \subset A$

Определение 1.1.2. Операции с множествами:

1. $A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$ (объединение множеств)

2. $A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$ (пересечение множеств)

3. $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}$ (разность множеств)

4. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (симметрическая разность)

Замечание. \cup, \cap, Δ — коммутативны, ассоциативны.

Теорема 1.1.1. Правила де Моргана:

$$1. A \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_{\alpha})$$

$$2. A \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_{\alpha} \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_{\alpha})$$

Доказательство.

Докажем первое утверждение (второе доказывается аналогично).

Возьмём $x \in A \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \right)$. Получаем, что $x \in A$ и $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \iff x \in A$ и $x \notin B_{\alpha} \forall \alpha \in I \iff$
 $\iff x \in A \setminus B_{\alpha} \forall \alpha \in I \iff x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_{\alpha})$. Доказано. \square

Теорема 1.1.2.

$$1. A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_{\alpha} \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_{\alpha})$$

$$2. A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha} \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_{\alpha})$$

Доказательство.

Докажем первое утверждение (второе доказывается аналогично).

Возьмём $x \in A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_{\alpha} \right) \iff x \in A$ или $x \in \bigcap_{\alpha \in I} B_{\alpha} \iff x \in A$ или $x \in B_{\alpha} \forall \alpha \in I \iff$
 $\iff x \in A \cup B_{\alpha} \forall \alpha \in I \iff x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_{\alpha})$. Доказано. \square

1.2. Отношения.

Определение 1.2.1. Упорядоченная пара $\langle a, b \rangle$ — пара "пронумерованных" элементов.

$$\langle a_1, a_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle \iff \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$$

Определение 1.2.2. Кортеж — упорядоченный набор из нескольких элементов.

$$\langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle$$

Определение 1.2.3. Декартово произведение множеств.

$$A \times B = \{\langle a, b \rangle : a \in A, b \in B\}$$

Определение 1.2.4. Бинарным отношением R называется подмножество элементов декартова произведения двух множеств ($R \subset A \times B$).

Элементы $x \in A$ и $y \in B$ находятся в отношении, если $\langle x, y \rangle \in R$ (то же, что xRy).

Обратное отношение $R^{-1} \subset B \times A$.

Пример.

Отношение равенства на некотором множестве A .

$$R = \{\langle x, x \rangle : x \in A\}$$

$$\forall x, y \in A : xRy \iff x = y$$

Определение 1.2.5. Область определения. Область значений.

$$\delta_R = \{x \in A : \exists y \in B, \text{ т.ч. } \langle x, y \rangle \in R\} \text{ (область определения)}$$

$$\rho_R = \{y \in B : \exists x \in A, \text{ т.ч. } \langle x, y \rangle \in R\} \text{ (область значений)}$$

$$\delta_{R^{-1}} = \rho_R, \rho_{R^{-1}} = \delta_R$$

Определение 1.2.6. Композиция отношений.

$$R_1 \subset A \times B, \quad R_2 \subset B \times C, \quad R_1 \circ R_2 \subset A \times C$$

$$R_1 \circ R_2 = \{\langle x, z \rangle : x \in A, z \in C \text{ и } \exists y \in B : \langle x, y \rangle \in R_1, \langle y, z \rangle \in R_2\}.$$

Пример.

$$A = B$$

$\langle x, y \rangle \in R$, если x — отец y .

$\langle x, y \rangle \in R \circ R$, если x — дед y .

$\langle x, y \rangle \in R^{-1} \circ R$, если x — брат y .

δ_R — все, у кого есть сыновья.

ρ_R — философский вопрос :)

Определение 1.2.7. Отношение называется:

- Рефлексивным, если $xRx \quad \forall x$.
- Симметричным, если $xRy \implies yRx$.
- Транзитивным, если $xRy, yRz \implies xRz$.
- Иррефлексивным, если $\neg xRx \quad \forall x$.
- Антисимметричным, если $xRy, yRx \implies x = y$.

Определение 1.2.8. R является отношением:

1. Эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.
2. Нестрогого частичного порядка, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.
3. Нестрогого полного порядка, если выполняется п. 2 + $\forall x, y$ либо xRy , либо yRx .
4. Строгого частичного порядка, если оно иррефлексивно и транзитивно.
5. Строгого полного порядка, если выполняется п. 4 + $\forall x, y$ либо xRy , либо yRx .

Пример.

1. $x \equiv y \pmod{m}$ — отношение эквивалентности.
2. X — множество, 2^X — множество всех его подмножеств.
 $\forall x, y \in 2^X : \langle x, y \rangle \in R$, если $x \subsetneq y$ — отношение строгого частичного порядка.
3. Лексикографический порядок на множестве пар натуральных чисел — отношение нестрогого полного порядка.

1.3. Вещественные числа

1.3.1. Понятие вещественных чисел

Определение 1.3.1. Вещественные числа — алгебраическая структура, над которой определены операции сложения «+» и умножения « \cdot » ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$).

Определение 1.3.2. Аксиомы вещественных чисел.

A1. Ассоциативность сложения

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

A2. Коммутативность сложения

$$x + y = y + x$$

A3. Существование нуля

$$\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \quad x + 0 = x$$

A4. Существование обратного элемента по сложению

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists (-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$$

M1. Ассоциативность умножения

$$x(yz) = (xy)z$$

M2. Коммутативность умножения

$$xy = yx$$

M3. Существование единицы

$$\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \quad x \cdot 1 = x$$

M4. Существование обратного элемента по умножению

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists x^{-1} \in \mathbb{R} : x \cdot x^{-1} = 1$$

АМ. Дистрибутивность

$$(x + y)z = xz + yz$$

О1. $x \leq x \quad \forall x$

О2. $x \leq y$ и $y \leq x \implies x = y$

О3. $x \leq y$ и $y \leq z \implies x \leq z$

О4. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y$ или $y \leq x$

О5. $x \leq y \implies x + z \leq y + z \quad \forall z$

О6. $0 \leq x$ и $0 \leq y \implies 0 \leq xy$

Объекты, отвечающие аксиомам А1-А4, М1-М4 и АМ, образуют поле.

Аксиомы О1-О6 называются аксиомами порядка и задают порядок на множестве вещественных чисел.

Определение 1.3.3. Аксиома полноты.

$$A, B \subset \mathbb{R} : A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, \forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq b$$

$$\text{Тогда } \exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B.$$

Замечание. Для \mathbb{Q} аксиома полноты не выполняется:

$$A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$$

$$B = \{b \in \mathbb{Q} : b \geq 0, b^2 > 2\}$$

$$\text{Тогда не существует } c \in \mathbb{Q} : a \leq c \leq b, \text{ т.к. } c^2 = 2.$$

1.3.2. Принцип математической индукции

Принцип математической индукции.

Положим P_n — последовательность утверждений.

1. P_1 — верно

2. $\forall n \in \mathbb{N}$ из P_n следует P_{n+1} .

Тогда P_n верно при всех $n \in \mathbb{N}$.

Утверждение 1.3.1. В конечном множестве вещественных чисел есть наибольший и наименьший элемент.

Доказательство.

Будем доказывать это утверждение по индукции. Докажем для минимума (для максимума аналогично).

База: $n = 1$ — очевидно.

Переход: $n \rightarrow n + 1$.

Рассмотрим произвольное множество из n элементов $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Пусть мы уже знаем, что минимумом в нём является элемент x_k . Тогда рассмотрим то же множество с добавленным в него элементом x_{n+1} . Заметим, что:

1. $x_k \leq x_{n+1} \implies x_k$ — минимум

2. $x_k > x_{n+1} \implies$ минимумом является новый добавленный элемент x_{n+1} .

Таким образом, в любом конечном множестве вещественных чисел существует минимальный элемент. \square

1.3.3. Принцип Архимеда

Согласно принципу Архимеда, $\forall x \in \mathbb{R}$ и $\forall y > 0 \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : x < ny$.

Доказательство.

$$A = \{a \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : a < ny\}, A \neq \emptyset, \text{ т.к. } 0 \in A$$

$$B = \mathbb{R} \setminus A$$

Пусть $A \neq \mathbb{R}$. Тогда $B \neq \emptyset$. Покажем, что $a \leq b$, если $a \in A, b \in B$.

От противного. Пусть $b < a < ny \implies b < ny \implies b \in A \implies$ противоречие.

Таким образом, по аксиоме полноты существует $c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \forall a \in A \forall b \in B$.

Пусть $c \in A$. Тогда $c < ny$ для некоторого $n \in \mathbb{N} \implies c + y < (n + 1)y \implies c + y \in A \implies c + y \leq c \implies y \leq 0$. Пришли к противоречию.

Пусть $c \in B$. Возьмём $c - y < c \implies c - y \in A \implies c - y < ny \implies c < (n + 1)y \implies c \in A$. Снова противоречие.

Таким образом, мы получили, что такое c не существует $\implies B = \emptyset \implies A = \mathbb{R}$. \square

Следствие.

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$

Доказательство.

$$x = 1, y = \varepsilon \implies \exists n \in \mathbb{N} : 1 < n\varepsilon. \quad \square$$

2. Если $x, y \in \mathbb{R}, x < y$, то $\exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$.

Доказательство.

Пусть $x < 0, y > 0$. Тогда $\exists r = 0 \in \mathbb{Q} : x < r < y$.

Пусть $x \geq 0, \varepsilon = y - x$. Тогда $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$.

По принципу Архимеда найдётся такое число m , что $\frac{m-1}{n} \leq x < \frac{m}{n}$.

Предположим, что $\frac{m-1}{n} \leq x < y \leq \frac{m}{n}$. Однако тогда получаем, что $\frac{1}{n} \geq y - x = \varepsilon$. Получили противоречие.

Следовательно, $\exists m \in \mathbb{N} : x < \frac{m}{n} < y$.

Случай $y \leq 0$ аналогичен предыдущему. \square

3. Если $x, y \in \mathbb{R}$ и $x < y$, то \exists иррациональное число $r : x < r < y$.

Доказательство.

$$x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} \implies \exists r \in (x - \sqrt{2}, y - \sqrt{2}) \implies x < r + \sqrt{2} < y \implies r - \text{иррациональное.} \quad \square$$

4. Если $x \geq 1$, то $\exists n \in \mathbb{N} : x - 1 < n \leq x$

1.4. Верхняя и нижняя границы

Определение 1.4.1. $A \subset \mathbb{R}$

a — верхняя граница множества A , если $\forall x \in A : x \leq a$.

b — нижняя граница множества A , если $\forall x \in A : b \leq x$.

Множество ограничено сверху, если \exists какая-нибудь верхняя граница.

Множество ограничено снизу, если \exists какая-нибудь нижняя граница.

Определение 1.4.2. Пусть A — ограниченное сверху множество. Тогда $\sup A$ (супремум) — наименьшая из его верхних границ.

Определение 1.4.3. Пусть A — ограниченное снизу множество. Тогда $\inf A$ (инфимум) — наибольшая из его нижних границ.

Пример.

1. \mathbb{N} не ограничено сверху (принцип Архимеда).

Пусть это не так. Тогда $\exists a \in \mathbb{R} : n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Однако $\exists y = 1, x = a : x < ny$ для некоторого $n \in \mathbb{N} \implies$ противоречие.

2. $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \implies \sup = 1$

Нижняя граница — любое число $\leq 0 \implies \inf = 0$.

Теорема 1.4.1.

1. Если $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ и A ограничено снизу, то $\exists! \inf A$.

2. Если $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ и A ограничено сверху, то $\exists! \sup A$.

Доказательство.

Докажем п. 2.

Пусть B — множество всех верхних границ A , т.е. $\forall a \in A \quad \forall b \in B : a \leq b$.

Тогда по аксиоме полноты получаем, что $\exists c : \forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq c \leq b$.

Следовательно, c — $\sup A$ (по определению).

Покажем, что c единственно. Пусть это не так и c_1, c_2 — $\sup A$. Тогда рассмотрим два случая:

1. $c_1 < c_2 \implies c_2$ не является супремумом \implies противоречие.

2. $c_2 < c_1 \implies c_1$ не является супремумом \implies противоречие.

Следовательно, $c_1 = c_2 \implies \sup A$ — единственный. □

Следствие.

1. $B \subset A, B \neq \emptyset$ и A ограничено снизу. Тогда $\inf B \geq \inf A$.

2. $B \subset A, B \neq \emptyset$ и A ограничено сверху. Тогда $\sup B \leq \sup A$.

Доказательство.

Докажем п. 1.

Пусть $a = \inf A$. Тогда a — нижняя граница $A \implies \forall x \in A : a \leq x \implies \forall x \in B : a \leq x \implies a$ — нижняя граница $B \implies a \leq \inf B$. □

Замечание. Теорема неверна без аксиомы полноты:

$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} \implies$ в множестве рациональных чисел у A нет \sup .

Теорема 1.4.2.

$$1. a = \inf A \iff \begin{cases} a \leq x \quad \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : x < a + \varepsilon \end{cases}$$

$$2. b = \sup A \iff \begin{cases} x \leq b \quad \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : x > b - \varepsilon \end{cases}$$

Доказательство. Докажем п. 1.

$a = \inf A \iff a$ — наибольшая из всех нижних границ A

$$\iff \begin{cases} a \text{ — нижняя граница} \\ \text{число } > a \text{ не является нижней границей} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a \leq x \quad \forall x \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : x < a + \varepsilon \end{cases}$$

□

Замечание.

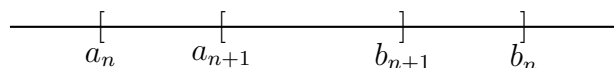
Если A не ограничено сверху, то $\sup A = +\infty$.

Если A не ограничено снизу, то $\inf A = -\infty$.

1.5. Теорема о вложенных отрезках

Теорема 1.5.1. $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$

Тогда $\exists c \in \mathbb{R} : c \in [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$.



Доказательство.

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$$

A лежит левее B , т.е. $a_i \leq b_j \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$.

При этом $\forall i \leq j : a_i \leq a_j \leq b_j, \forall i \geq j : a_i \leq b_i \leq b_j$.

По аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R} : a_i \leq c \leq b_j \quad \forall i, j \in \mathbb{N} \implies a_i \leq c \leq b_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

□

Замечание.

1. Для интервалов и полуинтервалов неверно.

Пример: $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0; \frac{1}{n}] = \emptyset$.

2. Для лучей также неверно.

Пример: $\bigcap_{n=1}^{\infty} [n; +\infty) = \emptyset$.

3. Без аксиомы полноты также неверно.

Пример: $\pi = 3, 1415926535\dots$

$$[3; 4] \supset [3, 1; 3, 2] \supset [3, 14; 3, 15] \supset \dots$$

В пересечении нет рациональных чисел.

2. Последовательности вещественных чисел

2.1. §3 Число e

Лемма (Неравенство Бернулли). Если $x > -1, n \in \mathbb{N}$, то $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Доказательство. по индукции.

База $n = 1$ – очевидно.

Инд. переход. $n \rightarrow n+1$

Знаем, что $(1+x)^n \geq 1+nx \implies (1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$.

Что и требовалось. □

Замечание.

- Равенство лишь когда $n = 1$ или $x = 0$.
- Неравенство верно и для $n \in \mathbb{R} \quad n \geq 1$ или $n \leq 0$. При $0 \leq n \leq 1$ неравенство верно с обратным знаком.

Пример 1.

$$|a| < 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$$

Докажем для $|a|$, что $\frac{1}{|a|} > 1 \implies \frac{1}{|a|} = 1+x$, где $x > 0$

$$\left(\frac{1}{|a|}\right)^n = (1+x)^n \geq 1+nx > nx$$

$$|a|^n \leq \frac{1}{nx} \rightarrow 0 \implies |a|^n \rightarrow 0$$

Пример 2.

$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ Покажем, что y_n монотонно убывает.

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}}{\frac{(n-1)^n}{(n-1)^n}} = \frac{(n+1)^{n+1}(n-1)^n}{n^{2n+1}} = \frac{n+1}{n} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n$$

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right) = \frac{n}{n+1} \left(\frac{n^2+n-1}{n^2-1}\right) = \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1$$

Д-м, что x_n монотонно возрастает.

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{(n+1)^n(n-1)^{n-1}}{n^{2n-1}} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{(n^2-1)^n}{n^{2n}} = \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

$$2 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < y_n < y_{n-1} < y_{n-2} < \dots < y_1 = 4$$

А значит, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Определение 2.1.1. $e = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Свойства.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$ по произведению пределов
2. $\forall n \quad x_n < e < y_n$

Доказательство. $x_n < x_{n+1} < x_{n+2} < \dots$

$$x_{n+1} < x_k \text{ при } k \geq n+2 \implies x_{n+1} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = e \implies x_n < x_{n+1} \leq e \quad \square$$

3. $2 < e < 3$, т.к. $x_1 = 2$, а $e < y_{10} < 3$.

4. $e \approx 2.718281828459045235360287$

$$y_n - x_n = (1 + \frac{1}{n} - 1)(1 + \frac{1}{n})^n < \frac{e}{n}$$

Теорема 2.1.1. $x_n > 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Доказательство.

$$l = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1}}{x_k}. \text{ Пусть } \varepsilon = \frac{1-l}{2}. \text{ Тогда найдется } N, \text{ т.ч. } \forall k \geq N \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} - l \right| < \varepsilon$$

$$\text{Значит } \frac{x_{k+1}}{x_k} < \frac{1+l}{2}.$$

$$\text{Тогда } x_k = x_N \cdot \frac{x_{N+1}}{x_N} \cdot \dots \cdot \frac{x_k}{x_{k-1}} < x_N \left(\frac{1+l}{2}\right)^{k-N} \rightarrow 0 \quad \square$$

Следствие (1.). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, если $a > 1$.

Доказательство.

$$x_n = \frac{n^k}{a^n}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} : \frac{n^k}{a^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \frac{1}{a} \rightarrow \frac{1}{a} < 1 \quad \square$$

Следствие (2.). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

Доказательство. Можно считать, что $a > 0$.

$$x_n = \frac{a^n}{n!} \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{a^n}{(n)!} = a \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \rightarrow 0 < 1. \quad \square$$

Следствие (3.). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

Доказательство.

$$x_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1 \quad \square$$

Теорема 2.1.2 (Теорема Штольца).

$$x_n, y_n$$

y_n строго монотонно возрастает. $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l$

Доказательство.

1. Случай $l = 0$.

$$\varepsilon_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \quad |\varepsilon_n| < \varepsilon$$

$$n > m \geq N$$

$$x_n - x_m = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_{m+1} - x_m) = \varepsilon_n(y_n - y_{n-1}) + \dots + \varepsilon_{m+1}(y_{m+1} - y_m)$$

$$|x_n - x_m| \leq \sum_{k=m+1}^n |\varepsilon_k| (y_k - y_{k-1}) < \varepsilon \sum_{k=m+1}^n (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon(y_n - y_m)$$

Поскольку $y_n \rightarrow +\infty$ $y_n > 0$ начиная с какого-то номера. Можно считать, что с номера N .

$$|x_n - x_m| < \varepsilon(y_n - y_m) < \varepsilon y_n$$

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{x_m}{y_n} \right| < \varepsilon \implies \left| \frac{x_n}{y_n} \right| < \varepsilon + \frac{|x_m|}{y_n} < 2\varepsilon$$

Выберем такой номер N_1 , что $y_n > \frac{|x_m|}{\varepsilon_n}$

Следовательно, если $n \geq \max(N, N_1)$, то $\left| \frac{x_n}{y_n} \right| < 2\varepsilon$

Значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$.

2. $l \in \mathbb{R}$ $\tilde{x}_n = x_n - l y_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1} - l(y_n - y_{n-1})}{y_n - y_{n-1}} - l = l - l = 0$$

$$\text{Тогда } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{x}_n}{y_n} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - l y_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} - l = 0 \implies \frac{x_n}{y_n} = l$$

3. $l = +\infty$

Проверим, что x_n строго монотонно возрастает начиная с некоторого места.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty$$

Значит, начиная с некоторого номера N $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1$.

Значит $x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} > 0 \implies x_n$ строго возрастает.

$$x_n - x_N = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_{N+1} - x_N) > (y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + \dots + (y_{N+1} - y_N) = y_n - y_N \rightarrow +\infty$$

А значит $x_n \rightarrow +\infty$

\implies

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0 \implies \frac{y_n}{x_n} = 0 \implies \frac{x_n}{y_n} = +\infty$$

4. $l = -\infty$

Аналогично с пунктом 3.

□

Пример. к теореме Штольца:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{m+1}} \sum_{k=1}^n k^m, m \in \mathbb{N}$$

$$x_n = \sum_{k=1}^n k^n, y_n = n^{m+1}, y_n \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^m}{n^{m+1} - (n-1)^{m+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 - (1 - \frac{1}{n})^{m+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{(m+1)\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^3} + \dots} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(m+1) + \dots + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots} = \frac{1}{m+1}$$

Тогда по теореме Штольца:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{m+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{m+1}} \sum_{k=1}^n k^m$$

Теорема 2.1.3 (Теорема Штольца-2).

y_n – строго монотонная последовательность и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$

Тогда если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l$

Доказательство.

1. Случай $l = 0$

$$\varepsilon_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}}$$

Тогда $\exists N \forall k \geq N \quad |\varepsilon_k| < \varepsilon$

Рассмотрим $n > m \geq N$

$$x_n - x_m = \sum_{k=m+1}^n (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=m+1}^n (y_k - y_{k-1}) \varepsilon_k$$

$$\text{Тогда } |x_n - x_m| \leq \sum_{k=m+1}^n |\varepsilon_k| (y_k - y_{k-1}) < \sum_{k=m+1}^n \varepsilon (y_k - y_{k-1}) = \varepsilon (y_n - y_m)$$

Тогда устремим $n \rightarrow \infty$

$$|x_n - x_m| \rightarrow |x_m|, \varepsilon (y_n - y_m) \rightarrow \varepsilon (-y_m).$$

А теперь по теореме о двух милиционерах $x_n \leq -\varepsilon y_m = \varepsilon |y_m|$, т.к. $y_m < 0$

\implies

$$|x_n| \leq \varepsilon |y_m| \implies \left| \frac{x_n}{y_m} \right| \leq \varepsilon, \text{ и это верное } \forall m \geq N \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$$

2. $l \in \mathbb{R}$

$$\tilde{x}_n = x_n - l y_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{x}_n}{y_n} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l$$

3. $l = +\infty$

Проверим, что x_n строго монотонно (начиная с некоторого места)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty \implies \text{при } n \geq N \quad \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1 \implies x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} > 0 \implies x_n \text{ строго монотонно возрастает при } n \geq N$$

Значит, можно поменять x и y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$$

Т.к. $x_n \nearrow, y_n \nearrow \implies x_n < 0, y_n < 0 \implies \frac{x_n}{y_n}$ – положительно.

4. $l = -\infty$

Вместо x_n напомним $\tilde{x}_n = -x_n$, получим предыдущий пункт.

□

2.2. §4. Подпоследовательности**Определение 2.2.1.**

x_1, x_2, x_3, \dots

$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, причем все $n_i \in \mathbb{N}$

Тогда подпоследовательность исходной последовательности:

$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots$

Пример.

1, 2, 3, 4, 5, ...

1. 2, 4, 6, 8, ... – подпоследовательность
2. 1, 4, 9, 16, 25, ... – подпоследовательность
3. 1, 1, 2, 3, 5, .. – не подпоследовательность

Свойства.

1. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то предел любой подпоследовательности тоже равен l .

Доказательство. Если снаружи интервала было лишь конечное число членов последовательности, то и у подпоследовательности было конечное число членов снаружи этого интервала. (подпоследовательность – стерли некоторые члены последовательности) \square

2. Если n_1, n_2, n_3, \dots это последовательность $\{n_k\}$
и m_1, m_2, m_3, \dots это последовательность $\{m_l\}$
и в объединении это все натуральные числа, то:

Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{l \rightarrow \infty} x_{m_l} = a \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

Доказательство. Есть интервал. Вне его конечное число x_{n_k} и вне интервала конечное число x_{m_l} . Поскольку все x либо там, либо там, то снаружи просто конечное число членов x_n . \square

Теорема 2.2.1 (О стягивающихся отрезках).

Есть много отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$

и пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$

Тогда существует единственное $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$

Доказательство. По теореме о вложенных отрезках, это пересечение не пусто. Надо проверить, что там нет двух точек.

Пусть там лежат точки $c < d$

Тогда $d - c \leq b_n - a_n$.

Перейдем в неравенстве к пределу:

$d - c \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. Получили противоречие. Осталось проверить лишь пределы концов отрезка.

$0 \leq c - a_n \leq b_n - a_n \rightarrow 0 \implies c - a_n \rightarrow 0$, а это тоже самое, что $a_n \rightarrow c$

Аналогично $0 \leq b_n - c \leq b_n - a_n \rightarrow 0 \implies b_n - c \rightarrow 0$, а это тоже самое, что $b_n \rightarrow c$ \square

Теорема 2.2.2 (Теорема Больцано-Вейерштрасса).

Из любой ограниченной последовательности можно выбрать подпоследовательность, имеющую конечный предел.

Доказательство.

Пусть a – нижняя граница, b – верхняя граница для всех x_n .

Значит, $x_n \in [a, b] \quad \forall n$

Хотя бы в одну половинку от этого отрезка попало бесконечное число членов последовательности. Пусть эта новая половинка – $[a_1, b_1]$.

В хотя бы одной половинке этого отрезка снова бесконечное число членов последовательности. Эта половинка $[a_2, b_2]$.

Действуем так и дальше.

Заметим, что $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$$

Следовательно, по теореме о стягивающихся отрезках, есть ровно одна общая точка. $\exists c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$.

Теперь строим подпоследовательность.

Пусть x_{n_1} – произвольный элемент последовательности из отрезка $[a_1, b_1]$

x_{n_2} – такой элемент из $[a_2, b_2]$, что $n_2 > n_1$. (найдется в силу бесконечности членов, содержащихся в данном отрезке)

x_{n_3} – такой элемент последовательности из $[a_3, b_3]$, что $n_3 > n_2$.

Продолжаем.

Получим:

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots$ – подпоследовательность, причем $x_{n_k} \in [a_n, b_n]$.

$a_n \leq x_{n_k} \leq b_n$, причем $a_n \rightarrow c, b_n \rightarrow c \implies x_{n_k} \rightarrow c$. Что нам и требовалось. □

Лемма.

1. Пусть x_n – монотонно возрастающая и неограниченная последовательность. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$
2. Пусть x_n – монотонно убывающая и неограниченная последовательность. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$

Доказательство.

Докажем только первый пункт, второй точно такой же.

Взяли какое-то E . Тогда E не является верхней границей для $\{x_n\}$. Тогда $\exists N \quad x_N > E$. Но т.к. последовательность возрастает, то все большие тоже больше E .

Получаем, что $\forall n > N \quad x_n > x_N > E \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ по определению. □

Следствие.

1. Из любой неограниченной сверху последовательности можно выбрать подпоследовательность, стремящуюся к $+\infty$
2. Из любой неограниченной снизу последовательности можно выбрать подпоследовательность, стремящуюся к $-\infty$

Доказательство.

1. Выберем монотонно возрастающую неограниченную подпоследовательность. Тогда автоматически ее предел будет $+\infty$

1 не является верхней границей последовательности. $\implies \exists x_{n_1} > 1$.

$\max\{x_1, x_2, \dots, x_{n_1}, 2\}$ – не является верхней границей. Тогда $\exists x_{n_2}$, больший этого \max .

Во-первых, тогда $x_{n_2} > 2$ и $n_1 < n_2$.

$\max\{x_1, x_2, \dots, x_{n_2}, 3\}$ – не является верхней границей. Тогда $\exists x_{n_3}$, больший этого \max . Заметим, что тогда $x_{n_3} > 3$ и $n_2 < n_3$.

И так далее.

Получаем:

$n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \dots$, причем $x_{n_k} > k$, причем $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3} < \dots$

Получаем, что это монотонно возрастающая и неограниченная подпоследовательность.

$$\implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = +\infty.$$

□

Следствие. Из любой последовательности можно выбрать подпоследовательность, имеющую предел в $\overline{\mathbb{R}}$

Доказательство.

Если ограничена, то это теорема Больцано-Вейерштрасса. Если не ограничена, то это предыдущее следствие. □

Определение 2.2.2. x_n называется фундаментальной (сходящейся в себе или последовательностью Коши), если $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N \implies |x_n - x_m| < \varepsilon$.

Свойства.

1. Фундаментальная последовательность ограничена.

Доказательство. Подставим $\varepsilon = 1$ тогда $\exists N \forall m, n \geq N |x_m - x_n| < 1$.

Возьмем $M = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, \dots, |x_N|\} + 1$.

Покажем, что $|x_n| \leq M$.

Если $n < N$, то очевидно.

Если $n \geq N \implies |x_n - x_N| < 1, |x_n - x_N| + |x_N| \geq |x_n|$ (по сумме модулей) $\implies |x_n| < M$

□

2. Если у фундаментальной последовательности есть сходящаяся подпоследовательность, то фундаментальная последовательность сходится.

Доказательство. $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность.

$\{x_{n_k}\}$ – сходящаяся подпоследовательность, т.е. $\lim x_{n_k} = l \in \mathbb{R}$.

Надо доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$

$$\exists N \forall m, n \geq N \quad |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists K \forall k \geq K \quad |x_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\tilde{N} = \max(N, n_K)$$

Пусть $n \geq \tilde{N}$ тогда $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$, если $m \geq \tilde{N}$.

В качестве m возьмем n_k , т.ч. $k \geq K$ и $n_k \geq N$.

$$|x_n - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } |x_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|x_n - l| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \square$$

Теорема 2.2.3 (Критерий Коши).

Последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел $\iff \{x_n\}$ – фундаментальна.

Доказательство.

“ \implies ”:

$$\text{Пусть } l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$.

$$\exists N \forall n \geq N \quad |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall m \geq N \quad |x_m - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\implies |x_n - x_m| \leq |x_n - l| + |l - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Док-во в другую сторону:

$\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность. Тогда она ограничена. А по теореме Больцано-Вейерштрасса существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, имеющая конечный предел. Тогда по свойству 2 фундаментальной последовательности $\{x_n\}$ имеет конечный предел. \square

Определение 2.2.3. Частичные пределы.

$\{x_n\}$ – последовательность. $l \in \overline{\mathbb{R}}$ – частичный предел, если существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, т.ч. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = l$.

Теорема 2.2.4. l – частичный предел \iff в любой окрестности l есть бесконечно много членов последовательности.

Доказательство.

Стрелочка “ \implies ” очевидна.

Докажем в другую сторону.

$\forall \varepsilon > 0$ в интервале $(l - \varepsilon; l + \varepsilon)$ бесконечно много членов последовательности.

Посмотрим на интервал $(l - 1; l + 1)$. Там бесконечно много членов последовательности. Возьмем один из них. Он x_{n_1}

$\varepsilon = \frac{1}{2}$. В $(l - \frac{1}{2}; l + \frac{1}{2})$ бесконечно много членов последовательности, а значит есть и член, номер которого больше n_1 . Он x_{n_2} .

$\varepsilon = \frac{1}{3}$. В $(l - \frac{1}{3}; l + \frac{1}{3})$ бесконечно много членов последовательности, а значит есть и член, номер которого больше n_2 . Он x_{n_3} .

И так далее.

В итоге получается набор индексов, который строго растет.

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

Еще знаем, что $x_{n_k} \in (l - \frac{1}{k}; l + \frac{1}{k})$.

$$x_{n_k} - l \in (-\frac{1}{k}; +\frac{1}{k})$$

Заметим, что т.к. обе границы интервала стремятся к 0, то $x_{n_k} - l \rightarrow 0 \implies x_{n_k} \rightarrow l$.

Если $l = +\infty$

$$E = 1 \quad (1; +\infty) \quad x_{n_1}$$

$$E = 2 \quad (2; +\infty) \quad x_{n_2} \quad n_2 > n_1$$

$$E = 3 \quad (3; +\infty) \quad x_{n_3} \quad n_3 > n_2$$

Ну отсюда и получим, что $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = +\infty$. □

Определение 2.2.4. $\{x_n\}$ – последовательность.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k$$

Еще обозначается как $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$

Определим нижний предел.

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} x_k.$$

Еще обозначается $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$

Теорема 2.2.5. Верхний и нижний предел существует в $\overline{\mathbb{R}}$ и $\underline{\lim} \leq \overline{\lim}$.

Доказательство.

$$y_n = \inf_{k \geq n} x_k, \quad z_n = \sup_{k \geq n} x_k$$

$$\inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+3}, \dots\} = y_n \leq y_{n+1} = \inf\{x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+3}, \dots\}$$

$$\sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+3}, \dots\} = z_n \geq z_{n+1} = \sup\{x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+3}, \dots\}.$$

Т.е. $y_n \nearrow, z_n \searrow$. Но монотонные последовательности всегда имеют предел в $\overline{\mathbb{R}}$

$$y_n \leq z_n$$

$$\implies \underline{\lim} \leq \overline{\lim}.$$

□

Замечание.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_n \sup_{k \geq n} x_k$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_n \inf_{k \geq n} x_k$$

Теорема 2.2.6.

1. Верхний предел – наибольший из всех частичных пределов.
2. Нижний предел – наименьший из всех частичных пределов.
3. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$.

Доказательство.

1. Докажем, что верхний предел – это частичный предел.

$$a = \overline{\lim} x_n, \text{ т.е. } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a, z_n = \sup_{k \geq n} x_k. z_n \text{ убывает.}$$

$$\text{Пусть } a \in \mathbb{R}. a \leq z_n = \sup_{k \geq n} x_k.$$

Тогда при любом j найдется какой-то x_k , т.ч. $k \geq n \quad x_k > a - \frac{1}{j}$.

Выберем n_1 так, что $x_{n_1} > a - 1$.

$$n_2 > n_1 \text{ так, что } x_{n_2} > a - \frac{1}{2}$$

$$n_3 > n_2 \text{ так, что } x_{n_3} > a - \frac{1}{3}$$

$$n_k > n_{k-1} \text{ так, что } x_{n_k} > a - \frac{1}{k}$$

Во-первых $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, значит выбрали подпоследовательность. Осталось проверить предел.

$$a - \frac{2}{k} < x_{n_k} \leq z_{n_k}$$

Обе части неравенства стремятся к a . Тогда $x_{n_k} \rightarrow a$.

Пусть $a = +\infty$. Тогда $z_n = +\infty \implies x_n$ – неограниченная сверху последовательность. Тогда у нее есть подпоследовательность, стремящаяся к $+\infty$

Пусть $a = -\infty$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = -\infty$.

$$-\infty \leq x_n \leq z_n \rightarrow -\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$$

Почему же он наибольший из всех?

Докажем, что $\overline{\lim} \geq$ любого частичного предела.

Пусть $l = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$. Тогда

$$x_{n_k} \leq z_{n_k}$$

$$l = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

2. $x_n \rightsquigarrow -\infty$

3. Пусть $l = \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$.

$$\text{Тогда } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = l. \text{ А так как } y_n \leq x_n \leq z_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l.$$

□

Теорема 2.2.7.

$$1. b = \overline{\lim} x_n \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \quad x_n < b + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geq N \quad x_n > b - \varepsilon \end{cases}$$

$$2. a = \underline{\lim} x_n \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \quad x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geq N \quad x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

Доказательство.

$$2. (\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \quad x_n > a - \varepsilon) \implies \inf_{n \geq N} x_n \geq a - \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \quad y_N > a - \varepsilon$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geq N \quad x_n < a + \varepsilon) \implies$$

$$\forall \varepsilon > 0 \forall N \quad \inf x_n < a + \varepsilon \iff y_N < a + \varepsilon.$$

□

Теорема 2.2.8.

Если $x_n \leq y_n$, то $\underline{\lim} x_n \leq \underline{\lim} y_n$, $\overline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} y_n$.

Доказательство.

$$x_n \leq y_n.$$

$$\inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \leq \inf\{y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \dots\}$$

$$\sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \leq \sup\{y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \dots\}$$

И пишем \lim . □

Замечание. Арифметические операции не сохраняются.

2.3. §5 Ряды.**Определение 2.3.1.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Частичная сумма ряда $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ существует в $\overline{\mathbb{R}}$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Если этот предел конечный, то ряд сходится.

Если предел бесконечный или не существует, то ряд расходится.

Теорема 2.3.1 (Необходимое условие сходимости ряда.). Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Доказательство.

$$\sum a_n - \text{сходится} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0. \quad \square$$

Пример.

1. Геометрическая прогрессия.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} (1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1}).$$

Если $|q| < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}.$$

2. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

$$S_{2n} = 0$$

$$S_{2n-1} = 1$$

А значит, предел не существует, ряд расходится.

3. Гармонический ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ – гармонические числа.

Поймем, что $H_n \rightarrow +\infty$.

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

Если влезло m блоков, т.е. $n \geq 2^m$, тогда

$$H_n > 1 + \frac{m}{2} \quad H_{2^m} > 1 + \frac{m}{2}$$

Получаем, что ряд расходится.

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1.$$

Ряд сходится и его сумма 1.

Свойства.

1. Сумма ряда единственна. (ибо предел последовательности частичных сумм, а он единственен, если есть)

2. Расстановка скобок.

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \dots$ S его сумма.

$$(a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + \dots$$

Сумма такого ряда тоже S .

$$S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4 \ S_5 \ S_6 \ S_7 \dots$$

Мы по сути берем подпоследовательность:

$$S_2 \ S_3 \ S_6 \ S_8 \dots$$

А значит, предел остается прежним, ежели был.

Замечание. Мы могли расставить скобки так, чтобы предел ПОЯВИЛСЯ.

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

3. Добавление/выкидывание конечного числа членов ряда не влияет на сходимость, но может поменять сумму.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \sum_{n=m}^{\infty} a_n$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \tilde{S}_n = a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n+m-1}$$

$$\tilde{S}_n = S_{n+m-1} - S_{m-1}.$$

А S_{m-1} – это фиксированное число.

4. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся.

$$\text{Тогда } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) \text{ сходится и ее значение равно } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Доказательство.

$$A_n = \sum a_k, B_n = \sum b_k$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B \in \mathbb{R}$$

Рассмотрим $\sum(a_n + b_n)$

$$S_n = \sum(a_k + b_k) = \sum a_k + \sum b_k = A_n + B_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n + B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n + \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = A + B.$$

□

5. Пусть $\sum a_n$ сходится и $c \in \mathbb{R}$.

Тогда $\sum ca_n$ сходится и по сумме равна $c \sum a_n$

Доказательство. $S_n = \sum ca_n = c \sum a_n = cA_n \rightarrow cA.$

□

3. Предел и непрерывность функций

3.1. §1 Предел функций.

Определение 3.1.1.

Окрестность точки a будем обозначать $U_\varepsilon = (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ при некотором ε .

Проколота окрестность точки a – это $\dot{U}_\varepsilon = U_\varepsilon \setminus \{a\}$

Окрестность $+\infty$ – луч $(E, +\infty)$

Окрестность $-\infty$ – луч $(-\infty, E)$

Определение 3.1.2. $X \subset \mathbb{R}$. a – предельная точка X , если \forall проколотой окрестности точки a пересечение ее с X не пусто.

Определение 3.1.3. Если $a \in X$ не является предельной, то a – изолированная точка.

Теорема 3.1.1.

Следующие условия равносильны:

1. a – предельная точка множества X
2. В любой окрестности точки a существует бесконечно много точек множества X .
3. Существует такая последовательность точек $x_n \in X$, т.ч. $x_n \neq a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Замечание. Последовательность из пункта 3 можно выбрать так, что $|x_n - a|$ строго монотонно убывает.

Доказательство.

3. \implies 1., 2. – очевидно.

$\lim x_n = a \implies$ все члены последовательности с какого-то номера лежат в $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

2. \implies 1..

В окрестности бесконечно много точек из $X \implies$ хотя бы одна точка отличается от a .

А значит, в проколотой окрестности есть точка из X .

1. \implies 3.

a – предельная точка X .

Возьмем $\varepsilon = 1$. Проколота окрестность содержит точку из X . Пусть она x_1 .

Возьмем $\varepsilon = \min\{\frac{1}{2}, |x_1 - a|\}$. Проколота окрестность содержит точку из X . Пусть она x_2 .

Возьмем $\varepsilon = \min\{\frac{1}{3}, |x_2 - a|\}$. Проколота окрестность содержит точку из X . Пусть она x_3 .

Делаем так дальше.

$$|a - x_k| < \frac{1}{k}$$

$$a - \frac{1}{k} < x_k < a + \frac{1}{k}.$$

Две штуки стремятся к a , значит $x_k \rightarrow a$.

□

Пример предельных точек.

1. (a, b)

Множество предельных точек этого интервала – $[a, b]$ Ясно, что любая точка, принадлежащая интервалу – предельная. Точки на концах – тоже (любой интервал будет пересекать).

2. $(a, b) \cap \mathbb{Q}$.

Множество предельных точек тоже $[a, b]$. (Т.к. в любой окрестности любой точки есть вещественные числа)

Определение 3.1.4 (предел функции в точке).

$$E \subset \mathbb{R}$$

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$, a – предельная точка множества E .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ (предел функции f в точке a), если

$$1. \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E \wedge 0 < |a - x| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

(определение по Коши)

2. Для любой окрестности U_A точки A найдется проколота окрестность \dot{U}_a точки a , т.ч. $f(E \cap \dot{U}_a) \subset U_A$.

(определение на языке окрестностей)

3. Для любой последовательности $\{x_n\}$, т.ч. $a \neq x_n \in E \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

(определение по Гейну)

Утверждение 3.1.2. Определения по Коши и на языке окрестностей равносильны.

Доказательство. равносильности первых двух определений.

Заметим, что 1). \iff 2)..

$$\dot{U}_a = (a - \delta; a + \delta) \setminus \{a\}$$

$$x \in \dot{U}_a \iff 0 < |x - a| < \delta$$

$$x \in E \wedge 0 < |x - a| < \delta \iff x \in E \cap \dot{U}_a$$

$$U_A = (A - \varepsilon, A + \varepsilon).$$

$$y \in U_A \iff |y - A| < \varepsilon$$

$$\forall x \in E \cap \dot{U}_a \implies f(x) \in U_A$$

Итого это расшифровывается как:

$$\forall x \in E \ 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

Т.е. эти два определение утверждают ровно одно и то же. □

Замечание.

Можем обобщить определение:

$$A = +\infty \quad U_A = (p; +\infty)$$

$$A = -\infty \quad U_A = (-\infty; p)$$

Свойства.

1. Предел – локальное свойство.

Т.е. если есть две функции, совпадающие в некоторой окрестности точки, то пределы в этой точке у них одинаковые.

Если f и $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ и $f(x) = g(x)$ в некоторой \dot{U}_a , то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, если один из них существует, или оба предела не существуют.

2. Значение функции в самой точке a не участвует в определении (нам все равно, какое оно).

3. Локальная ограниченность.

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}$.

Тогда $\exists U_a$, в которой f ограничена.

Доказательство. Воспользуемся определением по Коши.

$$\varepsilon = 1 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \quad 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x) - A| < 1 \implies |f(x)| \leq |A| + |f(x) - A| < |A| + 1.$$

Если $x \in E \cap U_a$, где $U_a = (a - \delta, a + \delta)$.

$$\text{Итого } |f(x)| \leq \max \{ |A| + 1, |f(a)| \} \quad \square$$

Замечание. А вот глобальной ограниченности может не быть.

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad E = (0; +\infty)$$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$, но глобальной ограниченности нет. Ближе к нулю $\frac{1}{x}$ становится очень большой.

4. Для того, чтобы в определении по Гейне существовал предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ достаточно, чтобы для любой последовательности $a \neq x_n \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ существовал $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$. (совпадение этих пределов для разных последовательностей требовать не обязательно.)

Доказательство. Предположим, что есть две последовательности, у которых получаются разные пределы.

$$\text{Пусть } a \neq x_n \in E \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

$$a \neq y_n \in E \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = B$$

Покажем, что тогда $A = B$.

$$\{z_n\} : x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots$$

$$\text{Заметим, что } a \neq z_n \in E \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = C$$

$$\text{Тогда } f(x_n)\text{- просто подпоследовательность для последовательности } f(z_n) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) =$$

$$= C \implies A = C.$$

Аналогично $B = C$.

А значит, $A = B$. □

Теорема 3.1.3. Определения по Коши и по Гейне равносильны.

Более того, в определении по Гейне можно ограничиться лишь монотонными последовательностями $\{x_n\}$.

Доказательство.

Коши \implies Гейне.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E \wedge 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

Рассмотрим произвольную последовательность $a \neq x_n \in E$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и докажем для нее, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и по нему возьмем $\delta > 0$ из определения по Коши.

$$\exists N \forall n \geq N \quad |x_n - a| < \delta.$$

$$\text{Покажем, что при } n \geq N \quad |f(x_n) - A| < \varepsilon.$$

$$\text{Если } n \geq N \quad |x_n - a| < \delta \quad a \neq x_n \in E$$

$$\implies x_n \in E \wedge 0 < |x_n - a| < \delta$$

$$\implies |f(x_n) - A| < \varepsilon.$$

А это мы и хотели.

Теперь покажем, что Гейне \implies Коши.

Ограничимся, кстати, только монотонными последовательностями.

Предположим, что определение по Коши не выполняется, т.е.

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in E \wedge 0 < |x - a| < \delta \text{ и т.ч. } |f(x) - A| \geq \varepsilon.$$

Зафиксируем это ε .

Подставим $\delta = 1$. Тогда $\exists x \in E \quad x \neq a \quad |x - a| < 1 \wedge |f(x) - A| \geq \varepsilon$. Назовем его x_1 .

Подставим $\delta_2 = \min\{\frac{1}{2}, |x_1 - a|\} > 0$. Тогда $\exists x \in E \quad x \neq a \quad |x - a| < \delta_2 \wedge |f(x) - A| \geq \varepsilon$. Назовем его x_2 . Тогда заметим, что $|x_2 - a| < |x_1 - a| \wedge |x_2 - a| < \frac{1}{2}$.

$\delta_3 = \min\{\frac{1}{3}, |x_2 - a|\} > 0$. Тогда $\exists x \in E \quad x \neq a \quad |x - a| < \delta_3 \wedge |f(x) - A| \geq \varepsilon$. Назовем его x_3 . Тогда заметим, что $|x_3 - a| < |x_2 - a| \wedge |x_3 - a| < \frac{1}{3}$.

Продолжим так дальше. Что же получилось?

$$|f(x_n) - A| \geq \varepsilon \text{ при всех } n.$$

$$|x_n - a| < \delta_n \leq \frac{1}{n} \implies x_n \rightarrow a$$

$$|x_1 - a| > |x_2 - a| > |x_3 - a| > \dots$$

Заметим, что вообще-то уже получили противоречие с определением по Гейне. Но мы еще обещали монотонность!

У нас точки приближаются к a , но по разные стороны. Хотя бы с одной стороны членов бесконечное количество. Выкинем все остальное.

Тогда $x_{n_k} \rightarrow a$ и x_{n_k} будет монотонна. □

Упражнение. Понять, что определения по Гейне и на языке окрестностей для $A = \pm\infty$ и/или $a = \pm\infty$ равносильны.

Свойства (пределов).

1. Предел единственен в $\overline{\mathbb{R}}$

Доказательство. От противного.

$$\text{Пусть } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = B.$$

Поскольку a — предельная точка E , то существуют $a \neq x_n \in E$, т.ч. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = B.$$

По единственности предела последовательностей получаем, что $A = B$. □

2. Стабилизация знака.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$$

Тогда $\exists \dot{U}_a$, т.ч. при $x \in \dot{U}_a \cap E$ у чисел $f(x)$ и A одинаковый знак.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$, $U_A = (A - \varepsilon; A + \varepsilon)$ (от 1 до $+\infty$, если A – бесконечность)

$\exists \dot{U}_a$, т.ч. $f(\dot{U}_a \cap E) \subset U_A$.

A в U_A лежит A и все числа одного знака.

$$\implies \forall x \in \dot{U}_a \cap E \quad f(x) \text{ и } A \text{ одного знака.} \quad \square$$

Теорема 3.1.4 (об арифметических действиях с пределами).

$$f, g : E \rightarrow \mathbb{R}, a\text{- предельная точка } E \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$$

Тогда

$$1. \lim(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$$

$$2. \lim f(x)g(x) = AB$$

$$3. \lim cf(x) = cA$$

4. Если $B \neq 0$, то $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ ($\frac{f(x)}{g(x)}$ определено лишь в некоторой окрестности точки a).

Доказательство.

1. Берем $a \neq x_n \in E$, т.ч. $\lim x_n = a$.

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = B.$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = A + B$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B.$$

Все остальное аналогично.

2. Поскольку $B \neq 0$, $g(x)$ имеет тот же знак, что и B в некоторой окрестности точки a . А значит, $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a . И далее как в пункте 1) с определением по Гейне. □

Оговорка – все эти свойства можем писать и для бесконечностей в тех же случаях, что и с последовательностями.

Теорема 3.1.5 (Предельный переход в неравенстве.). $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}, a\text{- предельная точка } E$

$$\text{и } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \text{ и } f(x) \leq g(x) \text{ при } x \in E.$$

Тогда $A \leq B$.

Доказательство.

Берем $a \neq x_n \in E$, т.ч. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A, \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = B \quad f(x_n) \leq g(x_n)$$

Тогда по теореме из последовательностей $A \leq B$. □

Замечание. Достаточно выполнения неравенства $f(x) \leq g(x)$ при $x \in E \cap \dot{U}_a$.

Теорема 3.1.6 (о двух милиционерах).

$f, g, h : E \rightarrow \mathbb{R}$, a - предельная точка E .

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ при $x \in E$.

и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$.

Тогда $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$.

Доказательство.

a - предельная точка из $E \implies$ найдется $a \neq x_n \in E$, т.ч. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Возьмем любую такую последовательность.

Тогда $f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$.

Еще мы знаем, что $f(x_n), h(x_n) \rightarrow A$.

Пользуясь теоремами про последовательности получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = A \implies \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$. □

Определение 3.1.5. Односторонние пределы.

$f : E \rightarrow \mathbb{R} \quad a$

$E_1 = (-\infty, a) \cap E \quad f_1 = f|_{E_1}$ - сужение на множество. Пусть a - предельная точка для E_1 .

Если $A = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$, то $A = \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ (левый предел)

$E_2 = (a, +\infty) \cap E \quad f_2 = f|_{E_2}$ - сужение на множество. Пусть a - предельная точка для E_2 .

Если $B = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$, то $B = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ (правый предел)

Пример.

$f(x) = [x]$ - целая часть.

$$\lim_{x \rightarrow n+} [x] = n$$

$$\lim_{x \rightarrow n-} [x] = n - 1$$

Попереписываем всякие определения: Перепишем определение левого предела с помощью $\varepsilon - \delta$.

$$A = \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E_1 : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

Это означает:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E : a - \delta < x < a \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

Аналогично $B = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E : a < x < a + \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$$

Осознаем, как будет выглядеть определение по Гейне.

$$A = \lim_{x \rightarrow a-} f(x).$$

\forall последовательности $\{x_n\}$, что $a \neq x_n \in E$ и $\{x_n\}$ монотонно возрастает, и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

$$B = \lim_{x \rightarrow a-} f(x).$$

\forall последовательности $\{x_n\}$, что $a \neq x_n \in E$ и $\{x_n\}$ монотонно убывает, и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = B$.

Определение 3.1.6.

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}$$

f монотонно возрастает, если $\forall x, y \in E : x < y \implies f(x) \leq f(y)$

f строго монотонно возрастает, если $\forall x, y \in E : x < y \implies f(x) < f(y)$

f монотонно убывает, если $\forall x, y \in E : x < y \implies f(x) \geq f(y)$

f строго монотонно убывает, если $\forall x, y \in E : x < y \implies f(x) > f(y)$

Замечание. Если $E = \mathbb{N}$, то это определение монотонности для последовательности $x_n = f(n)$.

Теорема 3.1.7.

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$, a – предельная точка $E \cap (-\infty, a)$.

1. Если f монотонно возрастает и ограничена сверху, то существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$.
2. Если f монотонно убывает и ограничена снизу, то существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$.
3. Если f монотонно возрастает и не ограничена сверху, то $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = +\infty$.
4. Если f монотонно убывает и не ограничена снизу, то $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = -\infty$.

Доказательство.

1. Рассмотрим $a \neq x_n \in E$ монотонно возрастающую последовательность, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Тогда $f(x_n)$ – монотонно возрастающая последовательность. (т.к. $x_n \leq x_{n+1}$, а функция монотонно возрастающая)

Если f ограничена сверху, то $\forall x \in E f(x) \leq M \implies f(x_n) \leq M \forall n$.

А значит, $f(x_n)$ – монотонно возрастающая ограниченная сверху последовательность. \implies существует конечный $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$.

Тогда все эти пределы равны между собой.

Упражнение. Почему для монотонных последовательностей в Гейне факт “достаточно лишь, чтобы предел был” тоже верен.

3. $a \neq x_n \in E$ монотонно возрастающая последовательность, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

$\implies f(x_n)$ монотонно возрастает.

$\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ конечный или бесконечный.

\implies все пределы равны.

Предъявим теперь последовательность такую, что $\lim_{n \rightarrow \infty} = +\infty$.

f неограничена сверху на $E \cap (-\infty, a)$

$\implies \exists x_1 \in E \cap (-\infty, a)$, т.ч. $f(x_1) > 1$.

$\max\{2, f(x_1)\}$ тоже не является верхней границей. $\implies \exists x_2 \in E \cap (-\infty, a)$, т.ч. $f(x_2) > \max\{2, f(x_1)\}$

Заметим, что тогда $x_2 > x_1$

$\max\{3, f(x_2)\}$ тоже не является верхней границей. $\implies \exists x_3 \in E \cap (-\infty, a)$, т.ч. $f(x_3) > \max\{3, f(x_2)\}$

Заметим, что тогда $x_3 > x_2$

В результате получили последовательность $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$ и $f(x_k) > k \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$

Объяснение, почему $\{x_n\}$ стремится к a :

Существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, то если это $b < a$, то $f(x_n) \leq f(b) \implies$ ограничена.

□

Теорема 3.1.8 (Критерий Коши для предела функций.). Существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E : 0 < |x - a| < \delta, 0 < |y - a| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Доказательство.

Докажем “ \implies ”.

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Напишем определение:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall y \in E : 0 < |y - a| < \delta \implies |f(y) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$

Тогда $\forall x, y \in E : 0 < |x - a| < \delta, 0 < |y - a| < \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - A| + |f(y) - A| < \varepsilon$. Что нам и требовалось.

Докажем в обратную сторону. Будем проверять по определению Гейне.

Возьмем $a \neq x_n \in E$, т.ч. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

$\forall \delta > 0 \exists N \forall n \geq N 0 < |x_n - a| < \delta$

\implies найдется N , начиная с которого верно $x_n \in E \wedge 0 < |x_n - a| < \delta$.

$\implies \forall m, n \geq N |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$

Получили определение фундаментальной последовательности. Значит, у нее есть конечный предел. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$.

Получаем, что по Гейне есть предел у функции в точке.

Критерий Коши доказан.

□

3.2. §2 Непрерывные функции.

Определение 3.2.1.

$f : E \rightarrow \mathbb{R} \quad a \in E$.

f непрерывна в точке a , если:

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E$ и $|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
2. $\forall U_{f(a)}$ - окрестность точки $a \exists U_a$ - окрестность точки a , т.ч. $f(U_a \cap E) \subset U_{f(a)}$
3. Если a - предельная точка множества E , то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
Если a - не предельная точка, то всегда непрерывна в точке.
4. Для любой последовательности $x_n \in E$, т.ч. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

Утверждение 3.2.1. Все 4 определения равносильны.

Доказательство.

Очевидно, что 1. и 2. – одно и то же (см. выше)

Покажем, что 2. и 3. – одно и то же.

Если a - предельная точка $E \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$\forall U_{f(a)} \exists \dot{U}_a f(E \cap \dot{U}_a) \subset U_{f(a)}$

Заметим, что $f(a) \in U_{f(a)}$, а значит проколотость ни на что не влияет.

Если a - не предельная (\cdot) E .

$\implies \exists \dot{U}_a$, т.ч. $\dot{U}_a \cap E = \emptyset \quad U_a \cap E = \{a\}$

$\{f(a)\} = f(a) = f(U_a \cap E) \subset U_{f(a)}$

Покажем, что 3. и 4. – одно и то же.

Если точка не предельная, то говорим о пустых множествах, неинтересно.

Если точка предельная $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \iff$ определение по Гейне.

$\forall x_n \in E \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

Заметим, что если втыкать в последовательность члены, равные пределу, то предел не испортится. □

Пример.

1. $f(x) = c$.

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$.

Подходит любое δ .

2. $f(x) = x$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Подходит $\delta = \varepsilon$.

3. $f(x) = [x]$

$a \in \mathbb{Z}$

Поймем, что тут нет непрерывности.

Какую бы не взяли окрестность точки a , есть x такой, что $f(x) = a - 1$. Тогда $|f(x) - f(a)| = |a - (a - 1)| = 1$.

Тогда для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ определение не выполнено.

Упражнение. $f(x) = \left\lfloor \{x\} - \frac{1}{2} \right\rfloor$ понять все про непрерывность.

Теорема 3.2.2 (об арифметических действиях с непрерывными функциями). $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ $a \in E$.

f, g непрерывны в $(.) a$. Тогда:

1. $f \pm g$ непрерывна в $(.) a$
2. fg непрерывна в $(.) a$
3. cf непрерывна в $(.) a$
4. $|f|$ непрерывна в $(.) a$
5. Если $g(a) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ непрерывна в $(.) a$

Доказательство.

Если a – предельная точка E , то все утверждения – это утверждения про пределы функций.

Если a – не предельная, то надо проверить про 1 точку. □

Следствие.

1. Многочлены непрерывны во всех точках.
2. Рациональные функции (отношение двух многочленов) непрерывны во всех точках, в которых знаменатель не обращается в 0.

Доказательство.

1. $f(x) = x$ – непрерывна во всех точках.
 $x^k = x \cdot x \cdot x \dots$ – непрерывны во всех точках.
 $a_k x^k$ – непрерывны во всех точках.
 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ – непрерывна во всех точках.
2. $P(x), Q(x)$ – многочлены, непрерывны во всех точках.
 Если $Q(x) \neq 0$, то по пункту 5 $\frac{P}{Q}$ непрерывны во всех не 0.

□

Теорема 3.2.3 (О стабилизации знака).

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ $a \in E$ f – непрерывна в $(.) a$ и $f(a) \neq 0$. Тогда найдется окрестность U точки a , т.ч. $\forall x \in U \cap E$ $f(x)$ и $f(a)$ одного знака.

Доказательство.

Пусть $f(a) > 0 \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) > 0$.

$\varepsilon = \frac{f(a)}{2} \exists \delta > 0$, т.ч. $\forall x \in E$ $|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

$\implies f(x) > \frac{f(a)}{2} > 0$ в $U = (a - \delta, a + \delta)$. □

Теорема 3.2.4 (Непрерывность композиции).

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}, g : D \rightarrow \mathbb{R} \quad f(E) \subset D$$

$$a \in E$$

f – непрерывна в $(\cdot) a$, g непрерывна в $(\cdot) f(a)$

Тогда $g \circ f(x) = g(f(x))$ – непрерывна в точке a .

Доказательство.

Если a – не предельная точка, то говорить не о чем.

Если a – предельная точка, то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{y \rightarrow f(a)} g(y) = g(f(a)).$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in D \text{ и } |y - f(a)| < \delta \implies |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon.$$

$$\forall \delta > 0 \exists \gamma > 0 \forall x \in E \quad |x - a| < \gamma \implies |f(x) - f(a)| < \delta.$$

$$y = f(x) \in D \quad |y - f(a)| < \delta$$

$$\implies |f(y) - g(f(a))| < \varepsilon \quad (g(f(x)) - g(y)).$$

Получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E \quad |x - a| < \gamma \implies |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon.$$

А это и есть непрерывность $g \circ f$ в точке a . □

Замечание.

Для пределов утверждение неверно. (Чтобы было верно, нужна непрерывность внешней функции)

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y = 0 \\ 1 & \text{при } y \neq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 1$$

НО.

$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x))$ не существует, ибо есть две последовательности с разными пределами:

$$x_n = \frac{1}{\pi n} \implies g(f(x_n)) = 0$$

$$x_n = \frac{1}{\pi n + \frac{\pi}{2}} \implies g(f(x_n)) = 1$$

Если же g непрерывна в точке b , а $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, то $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(b)$.

Доказательство.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ b & x = a \end{cases}.$$

Тогда $g \circ \tilde{f}(x)$ непрерывна в точке a .

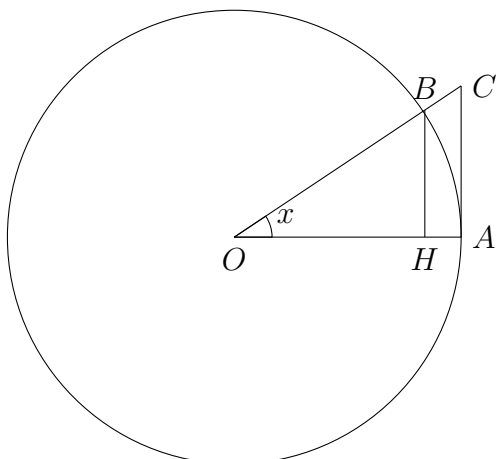
$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} g(\tilde{f}(x)) = g(\tilde{f}(a)) = g(b)$$

□

Теорема 3.2.5.

Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x < x < \tan x$.

Доказательство.



Пусть окружность радиуса 1.

$$\sin x = BH$$

$$\tan x = AC$$

$$S(\triangle OBA) = \frac{1}{2}BH \cdot OA = \frac{\sin x}{2}$$

$$S(\triangle OCA) = \frac{1}{2}CA \cdot OA = \frac{\tan x}{2}$$

$$S(\text{сектора } OBA) = \frac{x}{2}$$

$$S(\triangle OBA) < S(\text{сектора } OBA) < S(\triangle OCA)$$

$$\implies \sin x < x < \tan x$$

□

Следствие.

$$1. |\sin x| < |x| \quad \forall x \neq 0$$

Доказательство.

$$x \in (0; \frac{\pi}{2}) \implies 0 < \sin x < x \implies |\sin x| < |x|$$

$$x \in (-\frac{\pi}{2}; 0) \quad |\sin x| = \sin(-x) < -x = |x|$$

$$|x| \geq \frac{\pi}{2} \implies |\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|$$

□

$$2. |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

$$|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$$

Доказательство.

$$|\sin x - \sin y| = 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \left| \cos \frac{x+y}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x-y}{2} \right| = |x - y|$$

С косинусами – аналогично.

□

Теорема 3.2.6.

1. \sin и \cos непрерывны на \mathbb{R} .

2. \tan и \cot непрерывна на всем множестве определения.

Доказательство.

$$1. \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \varepsilon \quad \forall |x - a| < \delta \implies |\sin x - \sin a| \leq |x - a| < \delta = \varepsilon.$$

2. По теореме об отношении непрерывных функций.

□

Теорема 3.2.7 (Вейерштрасса).

$f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ и f непрерывна во всех точках $[a, b]$. Тогда

1. f ограниченная функция
2. f принимает наименьшее и наибольшее значение

Доказательство.

1. Предположим противное.

Тогда.

$$\exists x_1 \in [a, b] \quad |f(x_1)| > 1$$

$$\exists x_2 \in [a, b] \quad |f(x_2)| > 2$$

...

$$\exists x_n \in [a, b] \quad |f(x_n)| > n$$

Выберем по теореме Больцано-Вейерштрасса сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \rightarrow c$.

$$a \leq x_{n_k} \leq b \implies a \leq c \leq b.$$

$$\implies c \in [a, b] \implies f \text{ непрерывна в точке } c.$$

$$\implies \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(c) \in \mathbb{R}$$

Значит,

$f(x_{n_k})$ – ограниченная последовательность.

$$\text{Но мы знаем, что } |f(x_{n_k})| > n_k \geq k \implies |f(x_n)| \rightarrow \infty.$$

2. $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x) < +\infty$ по пункту 1.

Тогда $g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$ – непрерывная на $[a, b]$ функция.

Применяем первый пункт теоремы к функции g .

$\implies g$ ограничена сверху. \implies найдется такая точка M_1 , что $\frac{1}{M-f(x)} = g(x) \leq M_1$ при $x \in [a, b]$.

$\implies \frac{1}{M_1} \leq M - f(x) \implies f(x) \leq M - \frac{1}{M_1} < M$. Заметим, что получили новую верхнюю границу, меньшую M . Получили противоречие. Значит, максимум достигается.

□

Пример.

1. Существенно, что функция задана на отрезке.

$f(x) = \frac{1}{x} f : (0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция, но неограниченная сверху.

2. Непрерывность на всем отрезке тоже существенна.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x} & x \in (0; 1] \end{cases}$$

Тогда $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывна во всех точках кроме 0. Но не ограничена сверху.

Теорема 3.2.8 (Больцано-Коши). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

f непрерывна во всех точках $[a, b]$.

1. Если $f(a)$ и $f(b)$ противоположных знаков, то существует $c \in (a, b)$, т.ч. $f(c) = 0$.

2. Если C лежит между $f(a)$ и $f(b)$, то существует $c \in [a, b]$, т.ч. $f(c) = C$.

Доказательство.

1. Пусть $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.

Если $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, то нужное c найдено.

Если $\neq 0$.

Если $f(\frac{a+b}{2}) > 0$, то $[a_1, b_1] = [a, \frac{a+b}{2}]$

Если $f(\frac{a+b}{2}) < 0$, то $[a_1, b_1] = [\frac{a+b}{2}, b]$.

Проделаем эту процедуру снова.

Получится вложенная последовательность отрезков.

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$$

$$f(a_n) < 0 < f(b_n).$$

Воспользуемся теоремой о стягивающихся отрезках.

По ней найдется такая c , т.ч. $c \in [a_n, b_n]$ при всех n .

Причем $a_n \rightarrow c$ $b_n \rightarrow c$.

Вспомним, что f непрерывна в $(.)$ c .

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

$$f(a_n) < 0 \quad f(a_n) \rightarrow f(c) \implies f(c) \leq 0.$$

$$0 < f(b_n) \rightarrow f(c) \implies f(c) \geq 0.$$

А значит, $f(c) = 0 \implies$ нужная точка найдена.

2. $g(x) = f(x) - C$, тогда значения функции g на концах отрезка $[a, b]$ противоположных знаков.

$$\implies \exists c \quad g(c) = 0 \quad g(c) = f(c) - C \implies f(c) = C.$$

□

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \\ -1 & x \in [-1; 0) \end{cases}$$

Непрерывна во всех точках, кроме 0. Для нее Вейерштрасс не работает.

Теорема 3.2.9.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна во всех $(.)$

Тогда $f([a, b])$ – отрезок (возможно, вырожденный в точку)

Доказательство. По теореме Вейерштрасса

$$\exists p, q \in [a, b], \text{ т.ч. } f(p) \leq f(x) \leq f(q) \quad \forall x \in [a, b].$$

Тогда $f([a, b]) \subset [f(p), f(q)]$.

Поймем, что имеет место равенство.

Возьмем $y \in (f(p), f(q))$. Тогда по второй части теоремы Больцано-Коши для отрезка $[p, q]$ найдется $c \in (p, q)$ $f(c) = y$.

Заметим, что $c \in [a, b]$. Тогда $y \in f([a, b])$.

□

Теорема 3.2.10.

Непрерывный образ промежутка – промежуток (возможно, другого типа).

$[a, b]$ (a, b) $[a, b)$ $(a, b]$

Будем обозначать $\langle a, b \rangle$, если неважно, какой именно промежуток.

Доказательство.

$$m = \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x) \quad M = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$$

$$\implies m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in \langle a, b \rangle.$$

Докажем, что если $y \in (m, M)$, то $y = f(c)$ для некоторой $c \in \langle a, b \rangle$.

$$m < f(p) < y < f(q) < M.$$

Тогда применим снова теорему Больцано-Коши для отрезка $[p, q]$.

$$\implies \exists c \in (p, q) \quad f(c) = y$$

$$\implies c \in \langle a, b \rangle \implies y \in f(\langle a, b \rangle)$$

$$\implies (m, M) \subset f(\langle a, b \rangle) \subset [m, M].$$

А значит, $f(\langle a, b \rangle)$ промежуток.

□

Упражнение. Придумать примеры всех возможных типов.