DL 12.1. Вася побывал в опасном месте, где он мог с вероятностью 0.8 заболеть. Вася прошел обследование в двух клиниках, известно, что первая клиника выявляет заболевание (если оно есть) с вероятностью 0.5 (и не выявляет, если заболевания нет), а вторая клиника выявляет заболевание с вероятностью 0.75. Клиники работают независимо друг от друга. С какой вероятностью Вася заболел, если ни одна из клиник заболевание не обнаружила?

Определение 12.1. *Дисперсия* $D[X]$ случайной величины X — $D[X] \stackrel{\text{def}}{=} E\left[(X - E[X])^2\right]$.

DL 12.2. Покажите, что для любой случайной величины X выполнено:

a) $D[X] = E[X^2] - E[X]^2$;
b) $\Pr[X = 0] \leqslant \frac{D[X]}{E[X]^2}$.

DL 12.3. **(Коды Уолша-Адамара)**

a) Каждому $a \in \{0,1\}^n$ соответствует линейная функция $f_a : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, определяемая так: $f_a(x_1 x_2 \ldots x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \bmod 2$. Кодом Уолша-Адамара строки $a \in \{0,1\}^n$ называется таблица значений функции f_a и обозначается $\mathtt{WH}(a)$, нетрудно понять, что длина строки $\mathtt{WH}(a)$ равняется 2^n. Проверьте, что для двух различных строк $a, b \in \{0,1\}^n$ их коды $\mathtt{WH}(a)$ и $\mathtt{WH}(b)$ отличаются ровно в половине позиций.
b) Предположим, что у нас есть оракульный доступ к строке Z (это значит, что можно делать запросы к строке Z, за один запрос можно узнать один бит строки Z), которая отличается от $\mathtt{WH}(a)$ не более, чем в доле $\frac{1}{4} - \epsilon$ позиций, где ϵ — это некоторая константа, причем строка $a \in \{0,1\}^n$ нам неизвестна. Придумайте вероятностный алгоритм, который для всех $x \in \{0,1\}^n$ вычислит $f_a(x)$ с вероятностью как минимум $\frac{9}{10}$, причем этот алгоритм может должен делать лишь константное число запросов к строке Z и работать полиномиальное от n время.

DL 12.4. Назовем вероятностной булевой схемой такую схему, часть входов которой называются случайными битами. Пусть схема C имеет $n+m$ входов, первые n входов мы будем понимать как непосредственно входы, оставшиеся m входов как случайные биты. Будем говорить, что схема C вычисляет функцию $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ с ограниченной ошибкой, если для каждого $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $\Pr\limits_r[f(x) = C(x,r)] \geqslant \frac{2}{3}$, где вероятность берется по случайной строке r, которая принимает все значения из множества $\{0,1\}^m$ с равными вероятностями. Пусть функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ вычисляется вероятностной схемой C размера s с ограниченной ошибкой. Покажите, что:

a) для каждого многочлена $p(n)$ найдется такая вероятностная схема C' с $n+m'$ входами, размер которой полиномиален относительно sn, что при всех $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $\Pr\limits_r[f(x) = C(x,r)] \geqslant 1 - 2^{-p(n)}$, где вероятность берется по случайной строке r, которая принимает все значения из множества $\{0,1\}^{m'}$ с равными вероятностями;
b) найдется обычная схема с n входами, размер которой полиномиален относительно sn, что для всех $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $f(x) = C(x)$.

DL 11.3. Пусть есть бинарное дерево и в нем n листьев. Пусть $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ — это глубины всех листьев дерева. Докажите, что:

a) $\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{-\ell_i} \leqslant 1$;
b) если $\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{-\ell_i} \leqslant 1$, то найдётся дерево из n листьев с глубинами $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$.

DL 11.4. Пусть есть бинарное дерево и в нем n листьев. Покажите, что:

a) глубина хотя бы одного листа не меньше $\log n$;

b) средняя глубина листа не меньше $\log n$.

(Более строгая формулировка: рассмотрим случайную величину, которая выбирает случайный лист и выдает его глубину; докажите, что математическое ожидание этой случайной величины не меньше $\log n$.)

DL 10.2.

b) Докажите, что в сильно связном турнире есть гамильтонов цикл.

DL 10.3. Покажите, что для формулы в КНФ, состоящей из m дизъюнктов, в которой любые три дизъюнкта можно одновременно выполнить, существует набор значений переменных, который выполняет как минимум $\frac{2}{3}m$ дизъюнктов.

DL 10.4. Доминирующее множество в графе — это такое множество, что для каждой вершины, либо она сама лежит в этом множестве, либо она соединена ребром с вершиной из этого множества. В графе G минимальная степень вершины равняется $d > 1$. Докажите, что в G есть доминирующее множество размера не больше $n\frac{1+\ln(d+1)}{d+1}$.
Подсказка: рассмотрите случайное подмножество вершин, в которое каждая вершина включается с вероятностью $p = \frac{\ln(d+1)}{d+1}$.

DL 9.1. Пусть каждая вершина неориентированного графа имеет степень не больше, чем k. Докажите, что вершины графа можно покрасить

b) в $[k/2] + 1$ цвет так, чтобы для каждой вершины не более одного ребра исходило в вершины того же цвета ($[x]$ обозначает целую часть числа x).

DL 8.6. В связном графе на каждом ребре написали положительное вещественное число. Вес остовного дерева — это сумма чисел на рёбрах, содержащихся в этом дереве. Докажите, что:

a) минимальное по весу остовное дерево содержит хотя бы одно ребро минимального веса;

b) каждое ребро минимального веса содержится хотя бы в одном из остовных деревьев минимального веса.

DL 7.1. Вычислите суммы:

b) $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k k^m \cdot \binom{n}{k}$, где $m < n$.

DL 7.3.

b) Покажите, что число ломанных, из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$, пересекающих прямую $y = -1$, равняется числу ломанных из $(0, 0)$ в $(2n, -2)$.

c) Найдите число ломанных из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$, не опускающихся в нижнюю полуплоскость. Это число называется числом Каталана C_n.

d) Покажите, что $C_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$.

DL 7.6.

a) Докажите, что любое семейство непересекающихся интервалов на прямой конечно или счетно.

b) Докажите, что множество точек строгого локального минимума любой функции из $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ конечно или счетно.

DL 7.7. Докажите, что если множество на плоскости содержит отрезок, то оно равномощно $\mathbb{R}$.

DL 5.6. Пусть сигнатура содержит предикат равенства и трёхместный предикат S. Интерпретация: носитель — точки на плоскости, $S(X, Y, Z)$ означает, что $|XZ| = |YZ|$. Выразите предикат: A, B, C лежат на одной прямой.

DL 4.3. Докажите, что если булева функция вычисляется с помощью ветвящейся программы размера S, то она вычисляется и с помощью булевой схемы размера $O(S)$.

DL 4.4. Покажите, что если булева функция вычисляется с помощью схемы полиномиального от числа входов размера и глубиной $O(\log(n))$, то она вычисляется и формулой полиномиального от числа переменных размера.

DL 4.5. Правило *ослабления* позволяет вывести из дизъюнкта A дизъюнкт $A \vee B$ для любого дизъюнкта B. Покажите, что если из дизъюнктов $D_1, D_2, \ldots, D_n$ семантически следует дизъюнкт C (это значит, что любой набор значений переменных, который выполняет все дизъюнкты D_i, выполняет также и C), то C можно вывести из D_i с помощью применений правил резолюции и ослабления.

DL 3.3. Как модифицировать рассказанный на лекции алгоритм, проверяющий выполнимость формулы в 2-КНФ, чтобы он за полиномиальное от числа переменных время также выдавал набор значений переменных, который выполняет формулу?

Определение 3.2. Булева функция называется самодвойственной, если выполняется равенство $f(1 - x_1, 1 - x_2, \ldots, 1 - x_n) = 1 - f(x_1, \ldots, x_n)$. Булева функция называется линейной, если она имеет вид $f(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \bmod 2$, где $a_i \in \{0, 1\}$.

DL 3.5. **(Теорема Поста)** Пусть есть набор булевых функций, среди которых есть немонотоная, не сохраняющая ноль (т. е., $f(0, \ldots, 0) = 1$), не сохраняющая единицу (т. е., $g(1, \ldots, 1) = 0$), нелинейная, несамодвойственная. Докажите, что:

c) если набор булевых функций не удовлетворяет условию теоремы Поста, то через композицию этих функций нельзя выразить все булевы функции.

DL 2.2. Булева функция $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ называется монотонной, если при $x \leqslant y$ выполняется $f(x) \leqslant f(y)$ ($x \leqslant y$, если для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ выполняется $x_i \leqslant y_i$). Докажите, что:

b) монотонную булеву функцию можно записать в виде формулы, которая использует только связки $\vee$ и $\wedge$.