Матрицы, numpy и классы

Егор Суворов

Курс «Парадигмы и языки программирования», подгруппа 3

Среда, 21 сентября 2016 года

Организационное

- Я студент третьего курса бакалавриата СПб АУ (программист).
- Имена: «извините, пожалуйста», «Егор», «Егор Фёдорович».
- E-mail: `egor_suvorov@mail.ru`
  Тема e-mail: `[parad]...`
  ВК: `vk.com/egor.suvorov`
  Telegram: `@yeputons`
- Домашние задания общие с остальными подгруппами.
- Решения надо присылать мне. Если уже прислали кому-то ещё — перенаправлять не надо.
- Вопросы по текущей теме или смежным можно задавать в ходе рассказа на занятии.
- Вопросы по остальным темам и предметам лучше в оффлайне.
- А хотите Office Hours с 10 до 11?
- Слайды — на SEWiki.

Зачёт и проверка

- Надо набрать хотя бы половину баллов от максимума.
- Надо набрать строго положительные баллы по каждой теме.

Кто такие матрицы

Матрица — это квадратная[1] табличка[2] с чиселками[3].

1

2

3

Кто такие матрицы

Матрица — это квадратная[1] табличка[2] с чиселками[3].

[1] прямоугольная

[2]

[3]

Кто такие матрицы

Матрица — это квадратная[1] табличка[2] с чиселками[3].

[1] прямоугольная

[2] алгебраический объект

[3]

Кто такие матрицы

Матрица — это квадратная[1] табличка[2] с чиселками[3].

[1] прямоугольная
[2] алгебраический объект
[3] необязательно числа

Кто такие матрицы

Матрица — это квадратная[1] табличка[2] с чиселками[3].

Полезны при изучении:

- Почти чего угодно со словом «линейное»:
  - Систем линейных уравнений.
  - Линейных преобразований (плоскости, пространства...).
  - Линейных рекуррент ($F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$).
- Графов (матрица смежности/инцидентности).
- Машинного обучения (привет от линейной алгебры).

[1] прямоугольная

[2] алгебраический объект

[3] необязательно числа

Операции с матрицами

Запись матрицы A размера 2×3:

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{pmatrix}$$

Сложение матриц одного размера:

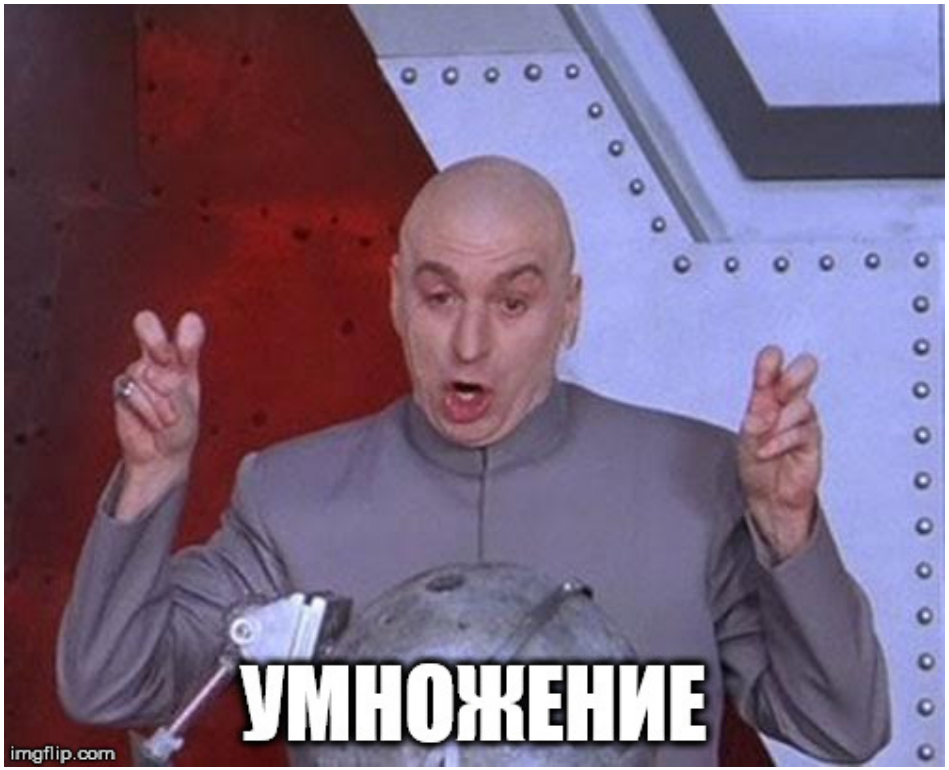
$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ 0 & A_{3,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & 0 \\ B_{3,1} & B_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} + B_{1,1} & A_{1,2} + B_{1,2} \\ A_{2,1} + B_{2,1} & A_{2,2} \\ B_{3,1} & A_{3,2} + B_{3,2} \end{pmatrix}$$

Уможение[4] матрицы с k столбцами на матрицу с k строками:

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{1,1} \\ B_{2,1} \\ B_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} \cdot B_{1,1} + A_{1,2} \cdot B_{2,1} + A_{1,3} \cdot B_{3,1} \\ A_{2,1} \cdot B_{1,1} + A_{2,2} \cdot B_{2,1} + A_{2,3} \cdot B_{3,1} \end{pmatrix}$$

[4] интуитивно можно думать «композиция отображений»

Ага



Wait But Why

Например, если матрица описывает преобразование координат:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ cx_1 + dy_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'x_2 + b'y_2 \\ c'x_2 + dy_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}}_{A'} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'(ax_1 + by_1) + b'(cx_1 + dy_1) \\ c'(ax_1 + by_1) + d'(cx_1 + dy_1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (a'a + b'c)x_1 + (a'b + b'd)y_1 \\ (c'a + d'c)x_1 + (c'b + d'd)y_1 \end{pmatrix} = (A' \cdot A) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Wait But Why

Например, если матрица описывает преобразование координат:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ cx_1 + dy_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'x_2 + b'y_2 \\ c'x_2 + dy_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}}_{A'} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A' \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A' \cdot \left(A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'(ax_1 + by_1) + b'(cx_1 + dy_1) \\ c'(ax_1 + by_1) + d'(cx_1 + dy_1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (a'a + b'c)x_1 + (a'b + b'd)y_1 \\ (c'a + d'c)x_1 + (c'b + d'd)y_1 \end{pmatrix} = (A' \cdot A) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Умножение матриц-1

```
a=[[1,2,3],
   [4,5,6]]
b=[[5,4],
   [3,2],
   [1,0]]
c=[[0, 0], [0,0]]
for i in range(2):
  for j in range(2):
    c[i][j] = sum(a[i][k] * b[k][j] for k in range(3))
print(c)  # [[14, 8],
          #  [41, 26]]
```

Получаем $O(n \cdot m \cdot k)$. Если матрицы квадратные — куб.
Python медленный, так что у меня работает 0.65 секунд на матрицах 150×150.

Умножение матриц-2

1987 год — алгоритм Копперсмита-Винограда, $O(n^{2,375477})$.
2010–2014 года — серия улучшений, аж до $O(n^{2,3728639})$.
Практика — алгоритм Штрассена, $O(n^{2,807355})$. Вам надо будет его реализовать.

Алгоритм Штрассена

Разделяй-и-властвуй (как алгоритм Карацубы):

1. Разделили каждую матрицу на четыре одинаковых.
2. ???
3. Profit

Цель — чтобы на втором шаге потребовалось строго меньше восьми умножений матриц:

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{1,1} \cdot B_{1,1} + A_{1,2} \cdot B_{2,1} & A_{1,1} \cdot B_{1,2} + A_{1,2} \cdot B_{2,2} \\ A_{2,1} \cdot B_{1,1} + A_{2,2} \cdot B_{2,1} & A_{2,1} \cdot B_{1,2} + A_{2,2} \cdot B_{2,2} \end{pmatrix}$$

Волшебные формулы смотрим в Википедии.

Велосипед уже изобретён

NumPy — библиотека для работы с многомерными массивами, в том числе с матрицами.

- Написано на C, незаметно «встраивается» в Python.
- Может даже использовать GPU, если хочет.
- Массивы гарантированно хранятся более эффективно.
- Ускоряются только встроенные в библиотеку операции (не циклы).

```
import numpy as np
a = np.array([[1,2,3],[4,5,6]])
b = np.array([[7,8,9],[10,11,12]])
print(a.shape)
print(a+b)
b[1][1] += 100
print(a.dot(b.transpose()))
print(b[:, 1:])
print(b[np.array([0, 0])])
```

Форма и копии

- Можно считать, что все элементы массива расположены в памяти в лексикографическом порядке друг за другом.
- Форма массива — это лишь числа, которые легко меняются:

```
print(np.arange(24))
print(np.arange(24).reshape(3, 8))
print(np.arange(24).reshape(3, 8).reshape(2, 3, 4))
```

- Все операции по умолчанию поэлементные (сложение, `np.exp`...).
- Конструкция `a = b` ничего не копирует (только ссылку).
- Можно получить отдельный объект на том же массиве (view): `b = a.view()`, `b = a[...]` (`...` — это именно многоточие).
- Можно скопировать целиком (долго): `b = a.copy()`.
- Можно конкатенировать массивы: `vstack`, `hstack`.

Распространение поэлементных операций

```
import numpy as np
a = np.arange(10).reshape(2, 5)
print(a * 100)
print(a + [5, 4, 3, 2, 1])
print(a + [[100], [1000]])
print(a.reshape(1, 10) * a.reshape(10, 1))
```

- К размерности дописываются единицы:
  $(3) \to (1, 3) \to (1, 1, 3) \to \ldots$
- Если какая-то размерность равна единице, то её можно расширить до максимума: $(1, 10) \to (10, 10)$.

Матрицы

Матрица — это двухмерный массив.

```
import numpy as np
a = np.arange(4).reshape(2, 2)
print(a * a)  # wtf
```

Матрицы

Матрица — это двухмерный массив.

```
import numpy as np
a = np.arange(4).reshape(2, 2)
print(a * a)  # wtf
```

Потому что все операции поэлементные. Используйте `a.dot(a)` или `np.dot(a, a)`.

Альтернативно можно использовать `np.matrix` вместо `np.array`, но это не рекомендуется:

- Если использовать оба, то будет путаница в операциях (типизация-то динамическая).
- Некоторые функции сторонних библиотек могут вернуть `array`, даже если получили на вход `matrix`.
- Поэлементные операции не работают (хотя умножать на число можно).
- `*` и `/` ведут себя по-разному.

Задание в классе №1(а)

Обязательное:

1. Установите NumPy (в составе набора SciPy): scipy.org/install.html.
   - Для Ubuntu всё лежит в репозиториях.
   - Для Mac надо поставить специальную сборку Python, в которую всё включено.
   - Для Windows надо сделать один из пунктов (на выбор):
     - Выполнить в консоли `pip install numpy`. Скачает десяток мегабайт и всё поставит.
     - Поставить специальную сборку Python вроде WinPython (см. ссылку).
2. Откройте руководство: docs.scipy.org/doc/numpy-dev/user/quickstart.html.
3. Перемножьте две матрицы при помощи NumPy и покажите код.

Задание в классе №1(б)

Дополнительное:

4. Перемножьте две такие же матрицы при помощи циклов `for` без NumPy.
5. Уменьшите количество циклов `for` до двух.
6. Замерьте время работы двух функций при разных n при помощи модуля `timeit`: `print(timeit.Timer(some_func).timeit(1))`.
7. Поделитесь разницей в скорости с друзьями.

Набираем классы

Если логическая сущность состоит из нескольких кусочков данных, они все лежат в одном объекте:

```
class BinaryExpression:
    def __init__(self, left, op, right):
        self.left = left
        self.op = op
        self.right = right

    def validate(self):
        self.left.validate()
        assert self.op == '+'
        self.right.validate()

expr = BinaryExpression(None, '+', None)
expr.validate()  # fails
```

Классы по-змеиному

- Первый параметр у методов объекта (передаётся неявно, в отличие от Java/C++) — это объект, над которым совершается операция.
- Обычно первый параметр называют `self`
- `__init__` — конструктор.
- Можно переопределить метод `__str__`, чтобы работал `print(expr)`.
- Также бывает `__cmp__`, `__eq__` и другие «magic methods»
- Всё публичное; приватное принято просто не вызывать. Можно начать метод с `_`, чтобы подчеркнуть приватность.
- Типизация утиная, никакого строгого «интерфейса» не задать.

Стандартные проблемы

```
class Foo:
    x=[]
foo = Foo()
bar = Foo()
print(foo.x, bar.x)
foo.x.append(1)
print(foo.x, bar.x)
```

Как с аргументами по умолчанию в функциях:

```
def foo(x=[]):
    x.append(1)
    print(x)
foo()
foo()
```

Поле x было одно на все экземпляры Foo.

Задание в классе №2

Напишите несколько программ, которые читают со стандартного входа строчки по одной и после каждого чтения выводят текущую строчку, если:

1. Она имела чётный номер.
2. Она была длины 3.
3. Она представляла собой целое число.
4. Она имела чётный номер среди строк длины 3, являющихся целыми числами.

Запрещается хранить предыдущие введённые строки.
После этого сохраните код в отдельный файл и выполните следующее задание.

Задание в классе №3

- Создайте и используйте класс «`Printer`» с методом `consume(str)`, который печатает строку `str`.
- Создайте и используйте класс «`FilterLengthIs3`» с конструктором `__init__(consumer)` и методом `consume(str)`. При вызове `consumer(str)` на строке длины три должен быть вызван метод `consumer.consume(str)`.
- Создайте и используйте аналогичный класс «`FilterIsNumber`».
- Создайте и используйте ангалогичный класс «`DropOdd`».
- Зацените чёткое разделение ответственности между написанными классами по сравнению с кодом без классов.

Работаем и спрашиваем!