Графом G называется совокупность из некоторого (обычно конечного) множества V, элементы которого называются **вершинами**, и некоторого выделенного подмножества E множества V^2 пар элементов множества V (называемых **ребрами**). Обычно подразумевается, что пары вершин неупорядочены (граф **неориентированный**) и элементы в каждой паре различны (нет **петель**). Если рассматриваются упорядоченные пары, граф называется **ориентированным** (или **орграфом**).

Если не оговорено противное, под графом понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер.

Говорят, что (вообще говоря, ориентированное) ребро $e = (v_1, v_2)$ **соединяет** вершины v_1 и v_2, **выходит** из вершины v_1 и **входит** в вершину v_2. Будем также говорить, что ребро e **инцидентно** вершинам v_1 и v_2, а вершины v_1 и v_2 **смежны**.

Определим операцию **стягивания** некоторого множества $V_1 \subset V$ вершин графа G следующим образом: вершины множества V_1 заменяются одной вершиной, которая соединена в новом графе со всеми вершинами, соединенными в G хотя бы с одной вершиной множества V_1. Остальные вершины и ребра между ними остаются. Полученный граф обозначаем G/V_1. Естественным образом определяются операции **удаления** вершин или ребер из графа (вершины удаляются, конечно, со всеми выходящими из них ребрами, а при удалении ребер множество вершин не меняется).

Степенью вершины v называется количество инцидентных ей ребер. В ориентированном случае определяются **входящая** и **исходящая** степени вершины, соответственно как количество входящих в вершину ребер и количество исходящих из нее ребер.

Теорема 1. *Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству ребер. В ориентированном графе сумма входящих степеней равна сумме исходящих степеней.*

Доказательство. Каждое ребро инцидентно двум вершинам, поэтому его удаление уменьшает сумму степеней всех вершин на 2. Удаляя по очереди все ребра (пусть их k), придем к *пустому* графу, в котором сумма степеней очевидна равна 0. Значит, вначале она была равна $2k$. В ориентированном случае при удалении ребра уменьшается на 1 как сумма входящих, так и сумма исходящих степеней, откуда аналогично следует второе утверждение теоремы. $\square$

Следствие. *В графе четное количество вершин нечетной степени.*

Предположим, что вершины $v_1, v_2, \ldots, v_n$ таковы, что $(v_i, v_{i+1}) \in E$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$. В этом случае говорят о **пути** $v_1 v_2 \ldots v_n$ из v_1 в v_n, **соединяющем** вершины v_1 и v_n. Если все вершины пути различны, путь называется простым; если различны все ребра — **реберно-простым**. Если $v_1 = v_n$, путь называется циклом. Цикл называется простым (соответственно реберно-простым), если различны вершины $v_1, v_2, \ldots, v_{n_1}$ (соответственно, различны все ребра). Заметим, что любой цикл, в котором одно и то же ребро не встречается дважды подряд (туда-обратно), содержит простой подцикл.

Если две вершины неориентированного графа совпадают или соединены некоторым путем, они называются **связанными**. В ориентированном случае связанными называются такие вершины a и b, что существуют пути как из a в b, так и из b в a (либо $a = b$).

Для дальнейшего нам понадобится понятие **отношения эквивалентности**.

Определение. *Отношение эквивалентности $\sim$ на множестве X — это бинарное отношение (то есть отображение из декартова квадрата X^2 в множество {истина, ложь}), для которого выполнены следующие условия:*

(i) Рефлексивность: $a \sim a$ для любого a в X,

(ii) Симметричность: если $a \sim b$, то $b \sim a$,

(iii) Транзитивность: если $a \sim b$ и $b \sim c$ то $a \sim c$.

Запись вида $a \sim b$ читается как “a эквивалентно b”.

Типичный пример отношения эквивалентности: два целых числа называются эквивалентными, если их разность делится на 5.

Если $(X, \sim)$ — множество с введенным на нем отношением эквивалентности, то X разбивается на (непересекающиеся) **классы эквивалентности**. Именно, для каждого $x \in X$ определим класс $C_x := \{y \in X : y \sim x\}$. Из определения легко видеть, что $x \in C_x$, если $x \in C_y$, то $y \in C_x$ и более того если $y \in C_x$, то $C_y \subset C_x$ (действительно, для всякого $z \in C_y$ имеем $x \sim y \sim z$, следовательно $x \sim z$, то есть $z \in C_x$). Меняя x и y местами получаем $C_x \subset C_y$, то есть $C_x = C_y$. Наконец, если C_x и C_y

пересекаются, $z \in C_x \cap C_y$, то по доказанному выше $C_x = C_z = C_y$. Итак, любые два класса либо не пересекаются, либо совпадают. Таким образом, они действительно образуют разбиение множества X.

Как в ориентированном, так и в неориентированном случае связанность — отношение эквивалентности на множестве вершин (проверка выполняется непосредственно). Классы эквивалентности называются **компонентами связности** (в ориентированном случае иногда говорят **компоненты сильной связности**).

Граф называется **связным**, если в нем ровно одна компонента связности (иными словами, любые две вершины связаны). Орграф, в котором одна компонента связности, называют **сильно связным**.

Каждая компонента связности является связным графом. Каждая компонента связности орграфа является сильно связным орграфом. Эти утверждения нуждаются, вообще говоря, в доказательстве: для вершин u, v одной компоненты связности (или сильной связности для орграфа) есть путь P из u в v в исходном графе — а доказать надо, что есть путь в компоненте. Это верно и легко устанавливается: любая промежуточная вершина пути P в исходном графе связана как с u, так и с v, так что все они действительно лежат в компоненте связности.

В неориентированном случае между вершинами из разных компонент связности ребер нет. В ориентированном случае все ребра между вершинами двух компонент A и B направлены в одну сторону (то есть либо все — из A в B, либо все — из B в A).

Граф без циклов называется **лесом**, если в нем нет циклов. Связный лес называется **деревом**.

Теорема 2. *Связный граф является деревом если и только если количество ребер на 1 меньше количества вершин.*

Доказательство. Отметим вершину a графа и присвоим ей номер 1. Будем делать следующие операции: если какая-то вершина x соединена с одной из уже отмеченных вершин y, то отмечаем вершину x, присваиваем ей минимальный из еще не присвоенных номеров, а также присваиваем (также минимальный из не присвоенных) номер ребру xy (ребра тоже нумеруются, начиная с 1). Поскольку граф связный, так можно пронумеровать все n его вершин, при этом образуется $n-1$ ребро, образующие сами по себе связный граф. То, что ребер ровно $n-1$, означает, что других ребер нет — то есть из каждой вершины ведет единственное ребро в вершину с меньшим номером. Заметим, что это условие необходимо и достаточно для отсутствия циклов, откуда и вытекает заключение теоремы. Действительно, если есть еще хотя бы одно ребро pq, то в графе есть цикл, проходящий по ребру pq и пути из p в q по отмеченным ребрам. Если же больше ребер, то нет и циклов, поскольку из вершины гипотетического цикла с самым большим номером должно вести два ребра в вершины с меньшим номером, что по построению невозможно. $\square$

Теорема 3. *В связном графе можно удалить несколько ребер так, чтобы осталось дерево (оно называется **остовным деревом**).*

Доказательство. Будем удалять ребра по одному, пока связность сохраняется. В тот момент, когда этого сделать нельзя, граф уже дерево: если бы в нем был цикл, можно было бы удалить любое ребро из этого цикла. $\square$

Следствие. *В связном графе с n вершинами хотя бы $n-1$ ребро.*

Следствие. *В связном графе можно удалить вершину без потери связности. Таких вершин хотя бы 2, если в исходном графе хотя бы две вершины.*

Доказательство. Рассмотрим остовное дерево графа. Поскольку в нем $n-1$ ребер, где n — количество вершин, то сумма степеней вершин равна $2n-2$. Следовательно, при $n > 1$ найдется не менее двух вершин степени 1 — иначе бы сумма степеней была не меньше, чем $1 + 2(n-1) = 2n-1$. Удаление каждой из этих вершин сохраняет связность дерева, а следовательно и всего графа.

Другой возможный способ доказательства: рассмотреть два конца самого длинного пути в графе. $\square$

Матричная теорема о деревьях.

Пусть G — граф с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и ребер $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. **Матрица смежности** A_G размера $n \times n$, определяется правилом

$$A_G(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{если } (i,j) \in E(G), \\ 0 & \text{если } (i,j) \notin E(G). \end{cases}$$

Это симметричная матрица, полностью определяющая граф — в связи с чем граф часто задают матрицей смежности. Сумма элементов в каждой ее строке равна степени соответствующей вершины.

Матрица инцидентности графа G имеет размеры $n \times m$ и определяется правилом

$$I_G(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{если } v_i \in e_j, \\ 0 & \text{если } v_i \notin e_j. \end{cases}$$

Для нас более важной будет матрица инцидентности ориентированного графа. Она определяется правилом

$$I_G(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{если вершина } v_i \text{ — начало ребра } e_j, \\ -1 & \text{если вершина } v_i \text{ — конец ребра } e_j \\ 0 & \text{если } v_i \notin e_j. \end{cases}$$

При перенумерации вершин и ребер графа в матрицах смежности и инцидентности переставляются строки и столбцы, так что строго говоря эти матрицы определяют даже не граф, а граф с нумерацией вершин (а в случае матрицы инцидентности — и ребер.)

Матрица Лапласа графа определяется правилом

$$\Delta_G(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{если } (i,j) \in E(G), \\ 0 & \text{если } i \neq j \text{ и } (i,j) \notin E(G), \\ -\deg(i) & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Название связано с тем, что решеточная аппроксимация дифференциального оператора Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ в точках решетки приводит именно к такой матрице. Как и в случае уравнений в частных производных, лапласиан есть симметричный неположительно определенный оператор (здесь мы допускаем некую вольность речи, отождествляя оператор и матрицу), так что часто удобнее иметь дело с минус лапласианом. Сумма элементов любой строки матрицы Лапласа равна 0 (и любого столбца, конечно, тоже). Поэтому матрица Лапласа вырождена: сумма столбцов равна 0, а значит, они линейно зависимы.

Простым, но важным свойством матриц графа является связь между матрицей Лапласа и матрицей инцидентности графа после введения на нем ориентации. Ориентируем каждое ребро произвольным образом, полученный ориентированный граф назовем $\tilde{G}$. Тогда

$$-\Delta(G) = I_{\tilde{G}} \cdot (I_{\tilde{G}})^t. \tag{1}$$

Здесь X^t обозначает транспонированную к X матрицу. Проверка тождества производится непосредственно. Отметим, что от ориентации правая часть не зависит лишь апостериори.

Оказывается, что многие комбинаторные свойства графы связаны с алгебраическими (точнее говоря — спектральными) свойствами его матрицы Лапласа. Самые известные спектральные (то есть выражающиеся через набор собственных значений) характеристики квадратной матрицы — след и определитель. След минус лапласиана равен удвоенному количеству ребер в графе - а определитель, как мы выяснили, всегда 0. Следующая линейно-алгебраическая лемма подсказывает, какая величина может сыграть роль “нетривиального” определителя.

Лемма 1. *Пусть в квадратной матрицы A сумма элементов любой строки и любого столбца равна 0. Тогда алгебраические элементы любых двух элементов A равны.*

Доказательство. Докажем, что если обнуляются хотя бы только все суммы по строчкам, то алгебраические дополнения U, V любых двух элементов u, v, стоящих в одной строчке, равны 0. Заменим эту строчку на новую: на местах элементов u, v поставим $+1$ и -1 соответственно, на местах остальных элементов поставим нули. В новой матрице по-прежнему сумма элементов любой строки равна 0, поэтому она вырождена (сумма столбцов равна 0 — то есть они линейно зависимы). Значит, ее определитель равен 0. Но с другой стороны он равен $U - V$, что видно из разложения определителя по измененной строчке. Таким образом, $U - V = 0$, что и требовалось. Аналогично, если сумма в каждом столбце равна 0, то равны алгебраические дополнения элементов любого столбца. Теперь ясно, что если равны суммы и в строках, и в столбцах, то равны все алгебраические дополнения. ☐

Нам понадобится следующее утверждение из линейной алгебры:

Теорема 4 (формула Бине-Коши)**.** *Пусть A, B — матрицы размеров $n \times k$ и $k \times n$, $C = AB$. Для набора $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_n \le k$ определим две матрицы размера $n \times n$, получающиеся из A, если оставить только столбцы с номерами $i_1, \ldots, i_n$, а из B — только строчки с такими номерами. Их определители обозначим $a(i_1, \ldots, i_n)$ и $b(i_1, \ldots, i_n)$. Тогда*

$$\det C = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} a(i_1, \ldots, i_n) \cdot b(i_1, \ldots, i_n). \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим обе части равенства (2) как функцию от строк матрицы A. Они обе линейны по каждой строке, так что совпадение достаточно выбрать базис в пространстве строк (мы выберем обычный базис из строк вида $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$) и проверять теорему в случае, когда каждая из строк — базисная. Если среди строк есть одинаковые, то обе части равны 0, если все они разные, то матрица C состоит из n строк матрицы B и единственное ненулевое слагаемое в правой части (2) как раз равно ее определителю. $\square$

Теорема 5 (Матричная теорема о деревьях)**.** *Пусть G — конечный граф. Тогда количество остовных деревьев в G равно алгебраическому дополнению любого элемента матрицы $-\Delta_G$.*

Доказательство. Будем постепенно устанавливать теорему для различных классов графов.

1) Теорема верна для несвязных графов. Действительно, если, например, вершины $v_1, \ldots, v_k$ не связаны ребрами с вершинами $v_{k+1}, \ldots, v_n$, то алгебраическое дополнение правого нижнего элемента матрицы $\Delta(G)$ равно 0: в соответствующем миноре сумма первых k столбцов равна 0. Количество остовных деревьев тоже равно 0.

2) Теорема верна для деревьев. Индукция по количеству вершин. Для деревьев с двумя вершинами все ясно. Пусть G — дерево с n вершинами, а для деревьев с $n-1$ вершиной теорема установлена. Не умаляя общности, вершина v_{n-1} — висячая, и соединена только с v_n. Пусть $G' = G - v_{n-1}$, тогда G' тоже дерево. Рассмотрим матрицы $-\Delta_G$ и $-\Delta_{G'}$. Легко видеть, что алгебраическое дополнение элемента $-\Delta_G(n, n)$ в первой матрице равно алгебраическому дополнению элемента $-\Delta_{G'}(n-1, n-1)$ во второй. Это наблюдение завершает переход индукции.

3) Переходим к графу общего вида. Используем равенство (1) и теорему Бине-Коши. Пусть M — $(n-1) \times m$-матрица инцидентности ориентированного графа $\tilde{G}$ (это граф G после ориентации каждого ребра), у которой удалили n-ую строку (отметим: это не то же, что матрица инцидентности графа $\tilde{G} - v_n$, поскольку ребра типа $v_n - v_k$ матрица M учитывает). Тогда алгебраическое дополнение, которое нас интересует, есть $\det M \cdot M^t$. Будем считать этот определитель по формуле Бине-Коши. Посмотрим на правую часть равенства (2). Слагаемые, стоящие в нем, соответствуют всем способам выбрать $n-1$ ребро в графе G. Для каждого способа π выбрать ребра обозначим образуемый ими граф (на тех же вершинах $v_1, \ldots, v_n$) через G_π. Тогда соответствующее слагаемое в правой части (2) будет равно алгебраическому дополнению (любого элемента, но мы смотрим на правый нижний) матрицы $-\Delta(G_\pi)$. Но граф G_π — либо несвязный (тогда, как мы выяснили, алгебраические дополнения равны 0), либо он есть остовное дерево графа — и тогда соответствующее слагаемое будет равно 1. Но это и означает, что полная сумма в правой части (2) в нашем случае будет равна числу остовных деревьев графа G. $\square$

В качестве простого следствия матричной теоремы о деревьях посчитаем число остовных деревьев полного графа K_n на n вершинах. Понятно, что остовные деревья этого графа суть просто деревья с n (помеченными!) вершинами.

Теорема 6 (Формула Кэли)**.** *Количество остовных деревьев полного графа K_n равно n^{n-2}.*

Доказательство. Преобразуем матрицу $-\Delta_{K_n}$, вычитая первую строку из всех. Алгебраическое дополнение левого нижнего элемента при этом не изменится, и будет видно, что оно равно n^{n-2}. $\square$

Связность графов. Блочная структура

Пусть V_1, V_2 — два подмножества множества вершин $V(G)$ графа G. Множество $X \subset V(G) \cup E(G)$ называется (V_1, V_2)-**разделяющим**, если в графе $G - X$ нет путей из V_1 в V_2. Про множество X будем говорить, что оно разделяет X и Y.

Определим также разрез и реберный разрез графа: множество $V_1 \subset V(G)$, (соответственно $E_1 \subset E(G)$) вершин (соответственно, ребер) называется **разрезом** (соответственно **реберным разрезом**) графа G, если при удалении V_1 (соответственно E_1) количество компонент связности графа увеличивается. Вершина, являющаяся разрезом, называется **точкой сочленения**; ребро, являющееся разрезом, называется **мостом**.

Связный граф G называется **k-связным** (соответственно, **реберно-k-связным**), если любой разрез (соответственно, реберный разрез) содержит не менее k вершин (соответственно, ребер).

Для изучения двусвязных графов нам понадобятся следующее определение.

Два ребра графа будем называть **похожими**, если они совпадают или входят в общий простой цикл.

Ключевой момент состоит в том, что введенное нами отношения есть отношения эквивалентности.

Доказательство. Достаточно доказать транзитивность Пусть ребра a, b входят в простой цикл Вася, ребра b, c входят в простой цикл Всеволод. Пойдем по Всеволоду от концов ребра c в две стороны, пока не наткнемся на Васю. Это произойдет не позже, чем мы подойдем к ребру b, так что на Васю мы наткнемся в разных вершинах x_1, x_2. Чтобы получить простой цикл, содержащий ребра a и c, достаточно взять те ребра Всеоволода, по которым мы прошли (в том числе c), и добавить ту часть Васи от x_1 до x_2, в которой лежит ребро a. □

Заметим, что вершина v не является точкой сочленения если и только если любые два ребра, выходящих из нее, похожи.

Отсюда вытекает следующая

Теорема 7. *Следующие утверждения для связного графа G с не менее чем тремя вершинами равносильны:*

1) граф двусвязен

2) любые две вершины входят в общий простой цикл

3)любая вершина и любое ребро входят в общий простой цикл

4) любые два ребра входят в простой цикл

Доказательство. Если в графе есть висячая вершина, то понятно, что он не удовлетворяет ни одном из свойств 1-4. Так что пусть степень каждой вершины не менее 2, тогда импликации (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) понятны. Осталось доказать (1) $\Rightarrow$ (4). Из предшествующего теореме наблюдения следует, что любые два соседних ребра двусвязного графа похожи. Так как похожесть есть отношение эквивалентности, а граф связен, это означает, что любые два ребра похожи, что и требовалось. □

Вернемся к произвольному связному графу G. Его ребра разбиваются на классы эквивалентнсоти по отношению похожести. Легко видеть, что ребра каждого класса (вместе с их вершинами) образуют двусвязный граф, и он максимален по включению (то есть не содержится ни в каком большем двусвязном подграфе) — потому как если два ребра содержатся в одном двусвязном подграфе, они похожи. Такие максимальные двусвязные подграфы называют **блоками**.

Любые два блока пересекаются не более чем по одной вершине (если есть две общие вершины, то пути между ними в двух блоках образуют цикл, но тогда ребра этих путей похожи — противоречие). Вершина, принадлежащая хотя бы двум блокам, является точкой сочленения (и наоборот, любая точка сочленения принадлежит хотя бы двум блокам). Это сразу следует из того наблюдения, что вершина является точкой сочленения если и только если выходящие из нее ребра попарно похожи.

Построим по графу G новый граф, содержащий информацию о его блочной структуре. Именно, вершинами нового графа $bc(G)$ будут блоки и точки сочленения графа G. Будем соединять в графе $bc(G)$ блок B и точку сочленения v, если $v \in B$.

Несложно видеть, что граф $bc(G)$ является деревом (если бы в нем был цикл, ребра разных блоков были бы похожими). Висячие вершины этого дерева соответствуют блокам, которые называются **крайними** блоками графа G.

Вернемся к разделяющим множествам в общем случае.

Имеется понятное препятствие к существованию малых разделяющих множеств между двумя множествами вершин V_1, V_2: большое количество непересекающихся путей. Оказывается, наличие такого препятствие не только достаточно, но и необходимо для того, чтобы малых разделяющих множеств не было. Именно, верна следующая

Теорема 8 (Теорема Геринга, 2000). *Пусть V_1, V_2 — два подмножества $V(G)$, k — натуральное число. Тогда верно ровно из двух условий:*

1) В $V(G)$ найдется подмножество U, $|U| < k$, разделяющее V_1 и V_2;

2) В G найдется не менее k простых путей из V_1 в V_2, попарно не имеющих общих вершин.

Доказательство. Понятно, что 1) и 2) одновременно выполняться не могут: разделяющее множество обязано содержать хотя бы по одной вершине из каждого из путей из V_1 в V_2. Таким образом, требуется доказать, что если не верно 1), то верно 2) — то есть, если любое (V_1, V_2)-разделяющее множество содержит не менее чем k вершин, то найдутся k путей из V_1 в V_2. Индукция по числу вершин в графе. База для 1 вершины, как обычно, очевидна. Будем удалять ребра до тех пор, пока любое (V_1, V_2)-разделяющее множество содержит не менее чем k вершин. Когда-то это закончится (если только $|V_1 \cap V_2| < k$ — но если $|V_1 \cap V_2| \geq k$, то имеется k одновершинных путей из V_1 в V_2). Итак, при удалении ребра uv образуется (V_1, V_2)-разделяющее множество Z, $|Z| < k$. Заметим, что множество $Z \cup x$ было разделяющим и до удаления ребра xy, а тогда $|Z| = k - 1$, $|Z \cup x| = k$. Аналогично, разделяющим было множество $Z \cup y$. Первый случай, который мы рассмотрим, состоит в том, что оно из множеств $Z \cup x$, $Z \cup y$ совпадает с X, а второе с Y. Этот случай прост и ясен: в качестве k путей из V_1 в V_2 можно взять вершины Z и ребро xy. Перейдем ко второму случаю, когда одно из множеств $Z \cup x$, $Z \cup y$ отлично и от X, и от Y. Обозначим это множество W, тогда $|W| = k$, $W \neq X$, $W \neq Y$ и W — (V_1, V_2)-разделяющее множество в нашем графе. Заметим, что любой путь из V_1 в W не проходит через вершины (непустого!) множества $V_2 \setminus W$ — иначе бы W не разделяло V_1 и V_2. Выкинем из нашего графа множество вершин $Y \setminus W$. Заметим, что любое (V_1, W)-разделяющее множество в новом графе G_1 является (V_1, W)-разделяющим и в старом, поскольку то, что мы выкинули, никак не помогает добраться из V_1 в W. Следовательно, оно является и (V_1, V_2)-разделяющим, ибо любой путь из V_1 в V_2 заходит в W. Поэтому в нем не менее k вершин. Но в графе G_1 строго меньше вершин, чем в исходном, так что к нему применимо индукционное предположение! Таким образом, имеется k непересекающихся путей из V_1 в W. Аналогично, имеется k непересекающихся путей из W в V_2. Осталось заметить, что путь из V_1 в W и из W в V_2 не могут пересекаться, кроме как по общему концу в W — это бы означало, что W не разделяет V_1 и V_2. Таким образом, осталось склеить два наших набора по k путей, чтобы получить k непересекающихся путей из V_1 в V_2. □

Эта теорема была доказана в 2000 г. и преподносилась автором как более простой способ доказать следующий классический результат:

Теорема 9 (Теорема Менгера, 1927). *Пусть вершины a и b связного графа G не соединены. Тогда наименьшее количество вершин (a, b)-разделяющего множества равно наибольшему количеству непересекающихся по вершинам путей, соединяющих a и b.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть граф $G - a - b$ и применить теорему Геринга к множествам V_1, V_2, где V_1 — множество соседей a, V_2 — множество соседей b (а k — наименьшая мощность (V_1, V_2)-разделяющего множества). □

Другое важное следствие теоремы Геринга — теорема Холла (также известная как лемма о девушках, задача о свадьбах, задача о назначениях). Она относится к паросочетаниям в двудольных графах. **Двудольный** граф — это граф, в котором вершины разбиты на два непересекающихся подмножества и ребра соединяют только вершины разных подмножеств. Следуя традиции, будем вершины одной из долей называть юношами, другой доли — девушками, а ребра — знакомствами. Обозначим количество юношей в исследуемом графе через m, а количество девушек через d. **Паросочетание** в графе (двудольном или нет) — это набор ребер без общих концов. В случае двудольного графа знакомств юношей и девушек паросочетание можно понимать как возможность одновременно женить нескольких юношей на знакомых им девушках.

Теорема 10 (Лемма о девушках). *Если для любого $k = 1, 2, \ldots, m$ любые k мальчиков знакомы в совокупности хотя бы с k девочками, то можно одновременно поженить каждого юношу на знакомой девушке (иными словами, существует паросочетание, покрывающее всех мальчиков).*

Замечание. *Очевидно обратное утверждение: если всех юношей можно поженить, то любые k из них знают в совокупности не менее чем k девушек.*

Доказательство. Применим к графу знакомств теорему Геринга. В качестве V_1 возьмем множество юношей, в качестве V_2 — девушек. Докажем, что любое (V_1, V_2)-разделяющее множество содержит не менее чем $m = |V_1|$ вершин. В самом деле, если $|U| \le m-1$, U разделяет V_1 и V_2, то любое ребро из $V_1 \setminus U$ ведет в $U \cap V_2$ (это равносильная переформулировка). Однако

$$|V_1 \setminus U| - |U \cap V_2| = |V_1| - |U \cap V_1| - |U \cap V_2| = |V_1| - |U| = m - (m-1) = 1.$$

Таким образом, множество юношей $V_1 \setminus U$ знакомо в совокупности менее чем $|V_1 \setminus U|$ девушками, что по условию невозможно. Таким образом, любое (V_1, V_2)-разделяющее множество содержит не менее чем $m = |V_1|$ вершин. Из этого по теореме Геринга следует, что имеется m непересекающихся путей из V_1 в V_2. Но пути в двудольном графе чередующиеся, так что это должны быть просто m ребер из V_1 в V_2 — что нам и нужно. □

Из леммы о девушках легко вытекает ее полезное обобщение:

Теорема 11 (обобщенная лемма о девушках). *Пусть $0 \le s \le m$ — целое неотрицательное число. Если любые k ($k = s, s+1, \dots, m$) юношей знают не меньше, чем $k - s$ девушек, то можно одновременно поженить хотя бы $m - s$ юношей.*

Доказательство. Позовем s *специальных* девушек, познакомим их со всеми юношами. Тогда для нового графа будет выполняться условие обычной леммы о девушках. Поженим юношей, пользуясь этой леммой. Хотя бы $m-s$ юношей будут женаты не на специальных девушках, что и требовалось. □

Другой формой обобщенной леммы о девушках является следующая

Теорема 12 (Кенига). *Наибольшее количество ребер в паросочетании двудольного графа G равно наименьшему количеству вершин в вершинном покрытии графа G (вершинное покрытие — это такое множество вершин, что каждое ребро содержит хотя бы одну из них).*

Доказательство. Обозначим наибольшее количество ребер в паросочетании через A, а наименьшее количество вершин в вершинном покрытии — через B. Ясно, что $A \le B$ (каждое ребро паросочетания должно содержать одну из вершин вершинного покрытия). Докажем, что $A \ge B$, то есть в графе существует паросочетание из B ребер. Для этого достаточно показать, что выполняется условие обобщенной леммы о девушках с $s = m - B$. Предположим противное: некоторые k юношей (назовем их блондинами, а остальных юношей — брюнетами) знают не больше, чем $k - s - 1 = k - m + B - 1$ девушек (назовем их шатенками, а остальных девушек — рыжими). Посмотрим на брюнетов и шатенок. Это всего $(m-k)+(k-m+B-1) = B-1$ человек. Так как блондины не знают рыжих девушек, эти $B-1$ человек образуют вершинное покрытие графа G — противоречие с минимальностью B. □

Иногда теорему Кенига формулируют в следующей форме:

В некоторых ячейках прямоугольной таблицы расставлены звездочки. Тогда наибольшее количество звездочек, не стоящих попарно в одной строке или одном столбце, равно наименьшему количеству линий (линии — это строки или столбцы), содержащих все звездочки.

Для доказательства достаточно применить теорему Кенига к графу строк и столбцов, в котором строка и столбец соединены ребром, когда на их пересечении поставлена звездочка.

Сейчас мы покажем, как с помощью теоремы Кенига доказывается важная теорема Дилуорса.

Введем некоторые определения.

Пусть M — некоторое множество, на котором введено отношение $\le$ (то есть для некоторых пар элементов $a, b \in M$ говорят, что $a \le b$). Предположим, что это отношение удовлетворяет двум следующим трем свойствам:

1°. (рефлексивность) $a \le a$

2°. (транзитивность) если $a \le b$ и $b \le c$, то $a \le c$.

3°. (антисимметричность) если $a \le b$ и $b \le a$, то $a = b$.

Такое отношение называется **частичным порядком**, а множество M, на котором оно задано — **частично упорядоченным**.

Примеры. 1. $M = \mathbb{R}$, порядок обычный.

2. M — множество фигур плоскости с таким порядком: $F_1 \le F_2$, если фигура F_1 лежит в F_2.

3. M — множество вершин некоторого ориентированного графа без циклов. $v_1 \le v_2$, если существует путь из вершины v_2 в вершину v_1.

Если $a \le b$ или $b \le a$, элементы a и b называются **сравнимыми**, в противном случае a и b называются **несравнимыми**.

Подмножество $M_1 \subset M$ множества M называется **цепью**, если любые два его элемента сравнимы. Заметим, что элементы $a_1, a_2, \dots, a_k$ конечной цепи можно пронумеровать так, что $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_k$. Это несложно доказать по индукции: упорядочим все элементы цепи, кроме одного, а потом найдем, в какое место вставить этот оставшийся.

Если множество M само является цепью, оно называется **линейно упорядоченным**.

Подмножество $M_1 \subset M$ называется **антицепью**, если никакие два его различных элемента не сравнимы. Например, множество фигур площади 1 образует антицепь в примере 2.

Одним из основных фактов теории частично-упорядоченных множеств является следующая

Теорема 13 (Дилуорса). *Пусть M — конечное частично упорядоченное множество. Тогда минимальное количество цепей, покрывающих все элементы M (минимальное цепное покрытие) равно максимальному количеству элементов в антицепи.*

Доказательство. Обозначим через A минимальное количество цепей, покрывающих M, а через B — максимально количество элементов антицепи. Ясно, что $A \ge B$ (любая антицепь содержит не более одного элемента из каждой цепи, входящей в цепное покрытие). Надо доказать, что $A \le B$. Построим следующий двудольный граф. Вершинам одной доли будут соответствовать элементы множества M, а другой — назовем ее M' — их копии (копию элемента a будем обозначать a'). Условимся о естественных обозначениях: будем говорить, что $a < b$, если $a \le b$ и $a \ne b$. Будем соединять элементы $a \in M$ и $b' \in M'$ ребром, если $a < b$. Рассмотрим в полученном двудольном графе максимально паросочетание. Пусть оно состоит из k ребер; количество элементов множества M обозначим через n. Этим k ребрам соответствует k неравенств вида $a_i < b_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) в множестве M. При этом все a_i различны, и все b_i различны, однако может оказаться, что $a_i = b_j$. Рассмотрим цепное покрытие множества M, в котором все цепи состоят из одного элемента (и того, их n штук). Будем уменьшать это покрытие, объединяя цепи, следующим образом: на i-ом шаге, пользуясь неравенством $a_i < b_i$, объединяем цепи, содержащие a_i и b_i. Так как все a_i различны и все b_i различны, это возможно (до i-го шага элемент a_i был самым большим в своей цепи, а b_i — самым маленьким). Таким образом, после k шагов получится $n-k$ цепей. Если $n-k \le B$, то все доказано. Предположим противное: $n-k \ge B+1$. Вспомним, что k — это размер наибольшего паросочетания в нашем графе. Согласно теореме Кенига, в этом графе найдется вершинное покрытие из k вершин. Некоторые вершины этого покрытия, скажем, $a_1, a_2, \dots, a_j$, будут лежать в доле M, а остальные, скажем, $b'_1, b'_2, \dots, b'_{k-j}$ — в доле M'. Выкинем из множества M все элементы $a_1, a_2, \dots, a_j$, а также $b_1, b_2, \dots, b_{k-j}$. Останется хотя бы $n-k$ элементов (некоторые из k выкинутых элементов могут совпадать), назовем их интересными. Заметим, что если для интересных элементов a, b выполнено неравенство $a > b$, то в графе G есть ребро (a, b'), не пересекающееся с нашим вершинным покрытием — противоречие. Значит, выкинутые элементы образуют антицепь, в которой хотя бы $n-k \ge B+1$ элемент — противоречие с выбором B. □

Перейдем к изучению паросочетаний в недвудольных графах.

Множество $A \subset V(G)$, состоящее из s вершин графа G ($s = 0, 1, 2, \dots$) называется **запрещающим**, если в графе $G-A$ найдется хотя бы $s+1$ нечетная компонента связности (то есть компонента связности с нечетным числом вершин).

Теорема 14 (Татта). *В графе G существует совершенное паросочетание если и только если в нем отсутствуют запрещающие множества.*

Доказательство. Предположим, что в графе есть запрщающее множество A из s вершин. Обозначим $C_1, C_2, \dots, C_{s+1}$ нечтеные компоненты графа $G - A$ (возможно, есть и еще нечетные компоненты). Ясно, что в любом паросочетании F графа G вершины компоненты C_i не разбиваются на пары, поэтому либо одна из них не покрыта паросочетанием F, либо одно из ребер F ведет из C_i в A. Поскольку в A всего s вершин, паросочетание F содержит не более s ребер, ведущих в A, стало быть для некоторого $i = 1, 2, \dots, s+1$ имеет место первый случай: одна из вершин компоненты C_i не покрыта ребрами F. Значит, паросочетание F не является совершенным. Таким образом, в графе с совершенным паросочетанием не может быть запрещающего множества.

Докажем обратное утверждение: в графе без запрещающих множеств есть совершенное паросочетание.

Предположим противное. Рассмотрим граф G_0 без наибольшего паросочетания и без запрещенных множеств. Ясно, что количество вершин графа G_0 четно (иначе запрещенным является множество из 0 вершин).

Предположим, что к графу G_0 можно добавить ребро e (соединив две еще не соединенные вершины) так, чтобы в графе G_0+e по-прежнему не было совершенных паросочетаний. Докажем, что и запрещенных множеств в графе G_0+e также нет. Предположим противное: в графе G_0+e есть запрещенное множество A из s вершин и $C_1, C_2, \ldots, C_{s+1}$ — нечетные компоненты графа G_0+e-A. Граф G_0-A либо совпадает с графом G_0+e-A (если хотя бы один из концов ребра e лежит в A), либо получается из G_0+e-A удалением ребра e (в противном случае). В первом случае множество A очевидно является запрещающим и в графе G_0 — противоречие. Во втором случае множество A также является запрещающим в графе G_0, так как при удалении ребра количество нечетных компонент не уменьшается (если ребро удалялось из нечетной компоненты и было в ней мостом, одна из двух новых компонент все равно будет нечетной). Опять противоречие.

Итак, граф G_0+e также не имеет ни совершенного паросочетания, ни запрещающих множеств. Будем добавлять к имеющемуся графу ребра, пока это возможно (то есть не появляется совершенное паросочетание). Если ни одного ребра добавить нельзя, то граф G обладает следующим свойством *насыщенности*: в графе G нет совершенного паросочетания, но оно появляется при добавлении любого ребра.

Структура насыщенных графов описывается полностью.

Рассмотрим насыщенный граф G. Обозначим через V_1 множество вершин графа G полной степени (то есть соединенных со всеми).

Докажем следующее утверждение: *в графе $G-V_1$ любая компонента связности является полным графом.*

Достаточно показать, что если в графе $G-V_1$ проведены ребра v_1-v_2 и v_1-v_3, то в нем проведено и ребро v_2-v_3 (то есть отношение быть соединенными ребром транзитивно). Предположим противное: v_2 и v_3 не соединены. Так как $v_1 \notin V_1$, вершина v_1 не соединена с некоторой вершиной $v_4 \in V(G)$.

Пользуясь свойством насыщенности, находим совершенные паросочетания F_1 и F_2 в графах $G+e_1$ и $G+e_2$, где $e_1=v_2-v_3$, $e_2=v_1-v_4$. Рассмотрим ребра паросочетаний F_1 и F_2. Они образуют несколько чередующихся циклов и несколько ребер, принадлежащих обоим паросочетаниям. Рассмотрим циклы C_1 и C_2, содержащие ребра e_1 и e_2 соответственно. Возможны два случая.

1) Если $C_1 \neq C_2$, изменим паросочетание F_1, заменив в цикле C_1 ребра паросочетания F_1 ребрами паросочетания F_2. Получим совершенное паросочетание графа G — противоречие.

2) Если $C_1 = C_2$, пойдем по пути $C_1 - e_2$ от вершины v_1 к вершине v_4, пока не встретим вершину v_2 или v_3. Не умаляя общности, это вершина v_2. Изменим F_1 следующим образом: заменим ребра F_1 ребрами F_2 на пути от v_3 до v_4 и добавим ребро v_1-v_3 (а ребро e_1 удалим). Получится совершенное паросочетание графа G — противоречие. Утверждение доказано.

Теперь совсем несложно закончить доказательство теоремы Татта.

Так как множество V_1 не является запрещающим в графе G, нечетных компонент в $G-V_1$ не больше, чем количество s вершин множества V_1. А в этом случае несложно построить совершенное паросочетание в графе G — противоречие. $\square$

Как и лемма о девушках, теорема Татта может быть перенесена на случай несовершенных паросочетаний.

Назовем **дефектом** графа G минимальное из таких неотрицательных чисел k_0, что при удалении любых s вершин графа G образуется не более, чем $s+k_0$ нечетных компонент.

Заметим, что четность дефекта равна четности количества вершин графа.

Верна следующая

Теорема 15 (Формула Бержа)**.** *Дефект графа равен количеству вершин, непокрытых наибольшим паросочетанием.*

Доказательство. Пусть $d(G)$ — дефект графа G. Аналогично доказательству простой части теоремы Татта убеждаемся, что в любом паросочетании остаются непокрытыми хотя бы $d(G)$ вершин.

С другой стороны, если добавить к графу G новые вершины в количестве $d(G)$ и соединить их ребрами со всеми остальными и друг с другом, то в новом графе не будет запрещающих множеств (действительно, если при удалении нескольких вершин остается хотя бы одна новая, то остается связный граф; если же удаляются все новые вершины и s старых, то остается не более $s+d(G)$ нечетных компонент по определению дефекта). Значит, в новом графе есть совершенное паросочетание. При этом все его ребра, кроме не более чем $d(G)$, принадлежат и графу G. Стало быть в G есть паросочетание, не покрывающее не более $d(G)$ вершин. $\square$

Эйлеровы циклы и пути

Путь (соответственно, цикл) в графе называется **эйлеровым**, если он по разу содержит все ребра графа.При этому удобно допускать в графе наличие кратных ребер.

Следующая теорема составляет простой критерий наличия в графе эйлерова пути или цикла.

Теорема 16. *В связном (неориентированном) графе существует Эйлеров цикл (соответственно, эйлеров путь, не являющийся циклом) если и только если в нем 0 (соответственно 2) вершины нечетной степени.*

Доказательство. Только-если-часть очевидна: эйлеров путь, проходя каждую промежуточную вершину, использует два инцидентных ей ребра, стало быть степени всех вершин, кроме начала и конца, четны. Аналогично для цикла. Доказательство если-части проводится индукцией по количеству ребер. Предположим для определенности, что речь о пути. Рассмотрим в нашем графе путь между двумя вершинами нечетной степени. Удалим его. Граф, возможно, распадется на компоненты связности, в каждой из которых степени всех вершин будут четными, а стало быть в них по индукционному предположению будут существовать эйлеровы циклы. Будем двигаться в исходном графе по удаленном пути. Каждый раз, встречая вершину из очередной не обойденной компоненты, будем обходить ее по эйлерову циклу этой компоненты и продолжать движение по пути. □

Гамильтоновы циклы и пути

Простой путь или цикл в графе называется **гамильтоновым**, если он проходит через каждую вершину (ровно) один раз.

Простых критериев существования гамильтонова пути или цикла в графе не известно и, по всей видимости, не существует.

Ограничимся следующей классической теоремой Дирака, дающей достаточное условие существования гамильтонова пути или цикла в терминах степеней вершин.

Теорема 17. *Если в графе G с n вершинами сумма степеней любых двух вершин не меньше $n-1$ (соответственно, не меньше n), в нем существует гамильтонов путь (соответственно, цикл).*

Доказательство. Нам понадобится следующая

Лемма. *Если в графе с k вершинами имеется гамильтонов путь, и сумма степеней концов этого пути не меньше, чем k, то в нем имеется и гамильтонов цикл.*

Доказательство. Пусть $p = A_1A_2 \dots A_k$ — гамильтонов путь, и вершина A_1 имеет степень l. Рассмотрим l *зеленых* вершин, предшествующих (в смысле порядка от A_1 до A_k) этим вершинам в пути p. Предположим, что вершина A_k не соединена с зелеными вершинами. Тогда степень вершины A_k не больше $k-1-l$, то есть сумма степеней вершин A_1 и A_k не больше $k-1$ — противоречие. Значит, вершина A_k соединена с какой-то зеленой вершиной A_i. В этом случае в графе существует гамильтонов цикл $A_1A_2 \dots A_iA_kA_{k-1} \dots A_{i+1}A_1$ □

Из леммы сразу следует, что если утверждение теоремы верно для пути, то верно и для цикла.

Докажем для пути. Рассмотрим самый длинный простой путь p. Предположим, что он не гамильтонов и содержит $k < n$ вершин. Граф, образованный вершинами пути p, назовем H. Заметим, что концы самого длинного пути соединены только с другими вершинами того же пути, так что к графу H применима лемма: сумма степеней концов пути p, являющегося в H гамильтоновым, не меньше чем $n-1 \geq k$. Таким образом, в графе G найдется цикл, проходящий по k вершинам. Если из него ведет хотя бы одно ребро вне цикла, то это сразу дает путь, проходящий по $k+1$ вершине — противоречие с максимальностью длины p. В противном случае степени всех вершин цикла не превосходят $k-1$, а степени не входящих в цикл вершин не превосходят $n-k-1$, что в сумме дает не более $n-2$ — опять противоречие. □

Покраски графов.

Раскраской вершин графа называется разбиение множества его вершин на несколько непересекающихся подмножеств (называемых цветами). Разбиение множества ребер называется **реберной раскраской**.

Раскраска называется **правильной**, если вершины, окрашенные в один цвет (то есть принадлежащие одному подмножеству разбиения), не соединены ребрами. Аналогично, реберная раскраска называется правильной, если ребра одного цвета не имеют общих вершин.

Наименьшее количество цветов, в которые можно правильно покрасить вершины (соответственно, ребра) графа G, называется **хроматическим числом** (соответственно, **хроматическим индексом**) графа G и обозначается $\chi(G)$ (соответственно, $\chi'(G)$).

Граф G называется **двудольным**, если $\chi(G) \leq 2$ (то есть его вершины можно правильно покрасить в два цвета).

Следующая теорема дает простой критерий двудольности графа.

Теорема 18. *Граф двудолен если и только если он не содержит нечетных циклов.*

Доказательство. Ясно, что в двудольном графе нет нечетных циклов (в каждом цикле цвета вершин чередуются). Докажем, что если нечетных циклов нет, то вершины можно покрасить в два цвета. С этой целью покрасим произвольную вершину A_0 в цвет 1. Присвоим вершине A_0 ранг 0. Вершины, соединенные с A_0, назовем вершинами ранга 1 и покрасим в цвет 2. Вершины, соединенные с вершинами ранга 1, покрасим в цвет 1 и присвоим им ранг 2. Продолжим в том же духе. Заметим, что вершины одного ранга не соединены (иначе найдется нечетный цикл, образованный соединенными вершинами одного ранга и путями от этих вершин до вершины A_1 — точнее, до момента первой встречи этих путей). Отсюда следует, что построенная раскраска вершин (вершины четного ранга красятся в один цвет, нечетного — в другой) будет правильной. □

При $c \geq 2$ проверка неравенства $\chi(G) \leq c$ (то есть возможности покрасить вершины графа в c цветов правильным образом) является значительно более сложной задачей (и математически, и в смысле теории алгоритмов). Полного простого описания, как для двудольных графов, тут нет. Поговорим о верхних оценках хроматического числа через оценки на степени вершин графа. Начнем со следующего несложного, но полезного утверждения.

Лемма 2. *Пусть v_1, v_2, …, v_n — все вершины графа G, и при всех $k = 1, 2, \ldots, n$ вершина v_k имеет не более чем d соседей среди вершин $v_1, \ldots, v_{k-1}$. Тогда $\chi(G) \leq d + 1$.*

Доказательство. Будем красить вершины в указанном порядке в $d+1$ цвет, начиная с v_1. Каждый раз у очередной непокрашенной вершины имеется не более чем d непокрашенных соседей, поэтому ее можно покрасить в цвет, отличный от цветов всех этих покрашенных соседей. Так покрасим все вершины. □

Следствие. *Если степени всех вершина графа G не превосходят d, то*

$$\chi(G) \leq d + 1. \tag{3}$$

Доказательство. Пронумеруем вершины в произвольном порядке и применим лемму 2. □

Заметим, что для полного графа K_{d+1} оценка (3) не улучшаема. Кроме того, она не улучшаема для $d = 2$ и графа, являющегося нечетным циклом. Глубокая теорема Брукса утверждает, что во всех остальных случаях для связного графа верно неравенство $\chi(G) \leq d$ (понятно, что задача правильной покраски графа сводится к покраске каждой компоненты связности, так что по существу достаточно ограничиться связными графами).

Теорема 19 (Брукс)**.** *Пусть G — граф, степени всех вершины которого не превосходят d. Тогда если $d \geq 3$ и ни одна компонента связности G не является полным графом K_{d+1}, то $\chi(G) \leq d$. При $d = 2$ неравенство $\chi(G) \leq 2$ выполняется, если ни одна компонента связности не является нечетным циклом.*

Доказательство. Как уже было сказано, достаточно рассмотреть случай связного графа G. Случай $d = 2$ понятен: G является путем или циклом, все пути и четные циклы красятся в 2 цвета, а нечетные циклы не красятся. Пусть $d \geq 3$. Выберем некоторую вершину q и ранжируем граф, начиная с x (q имеет ранг 0, соседи q — ранг 1, соседи вершин ранга 1, не имеющие ранга 0 и 1 имеют ранг 2 и так далее). Пронумеруем теперь все вершины графа, начиная с самого последнего ранга: сначала номера получат все вершины последнего ранга (в произвольном порядке), потом все вершины предпоследнего и так далее. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_n = q$ — построенная нумерация. Заметим, что при $i < n$ вершина v_i имеет хотя бы одного соседа v_j с $j > i$ (поскольку соединена хотя бы с одной вершиной меньшего ранга). Отсюда следует, что количество соседей вершины v_i среди вершин $v_1, \dots, v_{i-1}$ не превосходит $d-1$. Таким образом, применяя к графу $G' = G - x$ лемму 2, получаем, что G' можно правильно покрасить в d цветов $1, 2, \dots, d$. Назовем правильную покраску G' предпокраской. Заметим, что если нам удастся найти предпокраску, для которой соседи веришны q покрашены не во все используемые d цветов, то мы легко докрасим q. В частности, это заведомо имеет место, если $\deg(q) < d$. Предположим, что правильной покраски нашего графа не существует, тогда $\deg(q) = d$ и для любой предпокраски соседи $u_1, \dots, u_d$ вершины q имеют различные цвета. Начнем с какой-то предпокраски, не умаляя общности, будем считать, что u_i имеет цвет i длля всех $i = 1, 2, \dots, d$. Рассмотрим вершины цветов 1 и 2, пусть G_{12} — подграф G, образованный ими, и C_{12} — компонента связности этого графа, содержащая вершину u_1. Отметим следующие свойства компоненты C_{12}:

1) $u_2 \in C_{12}$. Действительно, если это не так, можно в компоненте C_{12} поменять местами цвета 1 и 2, после чего среди соседей q не окажется вершины цвета 1 — противоречие (мы получили выше, что для любой предпокраски соседи q имеют все цвета по разу.)

2) Компонента C_{12} — простой путь из u_1 в u_2. Докажем это. Если степень вершины u_1 в компоненте C_{12} не меньше 2, то среди соседей вершины u_1 встречается не более чем $1 + (d-3) = d-2$ цветов, что позволяет изменить предпокраску, перекрасив u_1 в цвет, отличный от 1 — противоречие. Аналогично, степень вершины u_2 в C_{12} равна 1. Ранжируем компоненту C_{12} из вершины u_1 и предположим, что степень некоторой вершины в ней хотя бы 3 (если нет, то все доказано — C_{12} может быть только простым путем из u_1 в u_2). Рассмотрим такую вершину w наименьшего ранга. Среди соседей вершины w встречается не более $d-3$ цветов, отличных от 1 и 2, что позволяет перекрасить w в цвет, отличный от 1 и 2. Но тогда из-за минимальности ранга вершины w компонента C_{12} становится просто путем из u_1, который обрывается, не дойдя до u_2. Но ни в какой предпокраске это не так по п.1) — противоречие.

Такие компоненты, которые мы будем называть чередующимися цепями, можно построить для любой пары цветов. Отметим еще свойство

3) Две чередующиеся цепи не могут иметь общих вершин, кроме концов. Действительно, если некоторая вершина w принадлежит, например, 12-цепи и 13-цепи, то ее соседи имеют не более чем $d-4$ цветов, отличных от 1,2,3, что позволяет ее перекрасить и разрушить обе цепи.

Теперь воспользуемся тем, что граф G — не полный. Тогда среди вершин $u_1, \dots, u_d$ найдутся две несмежные, пусть это будут вершины u_1 и u_2. Поменяем цвета 1 и 3 в цепи C_{13} (тут мы пользуемся тем, что $d \geq 3$). Теперь легко видеть, что цепи между парами цветов 1,2 и 2,3 пересекаются — заключительное противоречие, заканчивающее доказательство $\square$

Обозначим через $\chi_G(k)$ количество правильных раскрасок графа G в k (данных) цветов. Эта функция переменной k называется **хроматическим многочленом** графа G.

Легко видеть, что, например,

$$\begin{aligned} \chi_{\bar{K}_n} &= k^n \\ \chi_{K_n}(k) &= k(k-1)\dots(k-n+1) = (k)_n \\ \chi_{T_n} &= k(k-1)^{n-1}, \end{aligned}$$

где $\bar{K}_n, K_n, T_n$ — соответственно пустой граф, полный граф и (произвольное) дерево с n вершинами. Убедиться в этих соотношениях можно, крася вершины по одной, в случае дерева — подвесив его за вершину и крася по очереди вершины нулевого ранга, потом первого, потом второго и так далее.

Хроматический многочлен не только в этих случаях, а всегда является многочленом от k:

Теорема 20. *Если G — граф с n вершинами, то $\chi_G(k)$ — унитарный (со старшим коэффициентом 1) многочлен от k степени n с целыми коэффициентами.*

Доказательство. Каждой раскраске графа G соответствует разбиение множества его вершин на антиклики (пустые подграфы): для каждого цвета множество вершин этого цвета есть антиклика (возможно, пустая — то есть без вершин). Заметим, что для каждого разбиения множества $V(G)$ на m непустых антиклик имеется ровно $k(k-1)(k-2)\dots(k-m+1) = (k)_m$ раскрасок, дающих это разбиение (первая антиклика красится в один из k цветов, вторая в один из $k-1$ и так далее). Таким образом, если обозначить $S(G,m)$ количество разбиений $V(G)$ на m антиклик, то

$$\chi_G(k) = \sum_{m=0}^{n} S(G,m)(k)_m. \tag{4}$$

Осталось заметить, что $(k)_m$ — многочлен степени m от переменной k и $S(G,n)=1$, откуда χ_G — унитарный многочлен степени n. $\square$

Например, для пустого графа на n вершинах из (4)получаем известное соотношение

$$k^n = \sum S(n,m)(k)_m, \tag{5}$$

где $S(n,m)$ — числа Стирлинга второго рода (количество разбиений множества мощности n на m непустых подмножеств).

Очень полезным оказывается также рекуррентная формула для хроматического многочлена:

Теорема 21. *Пусть $e = uv$ — ребро графа G. Тогда*

$$\chi_G = \chi_{G-e} - \chi_{G/e}, \tag{6}$$

(где графы $G-e$ и G/e получаются из G соответственно удалением ребра G и стягиванием его в одну вершину.)

Доказательство. Раскраски графа $G-e$, в которых u и v имеют разный цвет, находятся в очевидном взаимно-однозначном соответствии с раскрасками G; раскраски графа $G-e$, в которых u и v имеют одинаковый цвет — во взаимно- однозначном соответствии с раскрасками G/e. Отсюда и получаем $\chi_{G-e} = \chi_G + \chi_{G/e}$. $\square$

Покажем, как работает рекуррентное соотношение (6), доказав следующую теорему, связывающую хроматический многочлен и **ациклические ориентации** графа. (ациклическая ориентация есть способ ориентировать каждое ребро графа так, чтобы полученный ориентированный граф не имел циклов).

Теорема 22 (Стэнли)**.** *Пусть $f(G)$ — количество ациклических ориентаций графа G с n вершинами. Тогда*

$$f(G) = (-1)^n \chi_G(-1). \tag{7}$$

Доказательство. Для пустых графов равенство (7) очевидно. Примем это за базу индукции, ведущейся по числу ребер. Пусть $e = uv$ — ребро графа G и для графов с меньшим числом ребер (7) установлено. Докажем, что

$$f(G) = f(G-e) + f(G/e). \tag{8}$$

Тогда (7) будет следовать из индукционного предположения и (6):

$$f(G-e) + f(G/e) = (-1)^n \chi_{G-e}(-1) + (-1)^{n-1}\chi_{G/e}(-1) = (-1)^n \chi_G(-1),$$

что и требовалось. Осталось проверить рекуррентное соотношение 8. Ациклические ориентации графа $G-e$ разобьем на два типа: пусть в A таких ориентациях между вершинами u и v есть путь (только в одном направлении, конечно), а в B ориентациях пути нет. Заметим, что тогда $f(G) = A + 2B$: ациклические ориентации $G-e$, в которых между u и v есть путь, единственным образом дополняется до ориентации G (надо ориентировать ребро e так же, как этот путь), а те, в которых пути между u и v нет — двумя способами (ориентируем ребро e как угодно). Осталось доказать, что $f(G/e) = B$. Но и это понятно: именно ориентации графа $G-e$, в которых нет путей между u и v останутся ациклическими после стягивания ребра e. $\square$

Обратимся к реберным раскраскам. Следующая теорема дает удивительно точные оценки на хроматический индекс графа через максимальную степень вершины.

Теорема 23 (Визинг)**.** *Пусть d — макимальная степень вершин графа G. Тогда $d \le \chi'(G) \le d+1$.*

Доказательство. Оценка $d \le \chi'(G)$ очевидна (ребра, выходящие из одной вершины, должны иметь разный цвет). Докажем, что граф можно покрасить в $d+1$ цвет. Индукция по количеству ребер. База (1 ребро) очевидна. Индукционный переход. Рассмотрим граф с наименьшим количеством ребер, для которого утверждение не верно. Удалим в нем произвольно одно ребро. Покрасим оставшийся граф в $d+1$ цвет $1, 2, \ldots, d+1$. Будем говорить, что цвет i отсутствует в вершине v, если ни одно из ребер, выходящих из v, не покрашено в цвет i. Ясно, что в каждой вершине отсутствует хотя бы один цвет (степень любой вершины меньше числа цветов).

Пусть $e_1 = xy_1$ — удаленное ребро. Пусть также в вершине x отсутствует цвет s, а в вершине y — цвет t_1. Из вершины x выходит хотя бы одно ребро цвета t_1, иначе можно покрасить e_1 в цвет t_1 (и получить правильную раскраску ребер графа G). Пусть это ребро xy_2, и в вершине y_2 отсутствует цвет t_2. Предположим, что уже построены (различные) ребра $e_i = xy_i$ для $i = 2, 3, \ldots, l$ такие, что ребро $e_i = xy_i$ покрашено в цвет t_{i-1}, отсутствующий в вершине y_{i-1}.

Если можно продолжить эту последовательность (то есть найдется вершина y_{l+1}, отличная от $y_1, y_2, \ldots, y_l$, для которой ребро xy_{l+1} окрашено в цвет t_l), продолжим ее. Когда-то этот процесс остановится. Рассмотрим этот момент.

Из вершины x не выходит ребер цвета t_l в вершины, отличные от $y_2, y_3, \ldots, y_{l-1}$. Если из вершины x вообще не выходит ребер цвета t_l, перекрасим каждое ребро xy_i в цвет t_i ($i = 1, 2, \ldots, l$). Получим правильную покраску ребер графа G.

Значит, из вершины x выходит ребро цвета t_l в какую-то вершину y_j. Снова перекрасим ребра $e_i = xy_i$ в цвета t_i, на этот раз для $i = 1, 2, \ldots, j-1$. Ребро $e_j = xy_j$ пока оставим непокрашенным.

Посмотрим на ребра цветов s и t_l. Граф, образуемый этими ребрами, назовем G_1. Ясно, что в графе G_1 степени вершин не больше 2, причем каждая компонента связности — либо цикл, либо путь. Заметим, что вершины x, y_l и y_j имеют в G_1 степени не больше 1 (так как в вершине x отсутствует цвет s, а в вершинах y_l и y_j — цвет t_l).

Значит, вершины x, y_j, y_l не могут лежать в одной компоненте графа G_1. Рассмотрим два случая.

1. Вершины x и y_j находятся в разных компонентах. В этом случае в компоненте, содержащей вершину y_j, *переставим* цвета s и t_k. Тогда можно покрасить ребро xy_j в цвет s.

2. Вершины x и y_j находятся в одной компоненте, а y_l — в другой. Перекрасим ребра e_i ($i = j, j+1, \ldots, l-1$) в соответствующие цвета t_i, а ребро $e_l = xt_l$ оставим непокрашенным. После этого переставим цвета s и t_l в компоненте, содержащей вершину y_l. Наконец, покрасим ребро xy_l в цвет s. □

Планарные графы

Граф называется **плоским**, если он изображен на плоскости так, что вершинам соответствуют различные точки плоскости, а ребрам — непересекающиеся ломаные между этими вершинами. Граф, изоморфный плоскому (то есть тот, который можно так изобразить), называется **планарным**.

Для плоского графа можно определить **грань** как одну из областей, на которые ребра графа делят плоскость (в том числе, "внешнюю"область).

Теорема 24 (Формула Эйлера)**.** *Пусть B — число вершин, P — ребер, Γ — граней, K — компонент связности плоского графа. Тогда*

$$B - P + \Gamma = 1 + K \tag{9}$$

Доказательство. Индукция по количеству ребер. Если ребер нет, то $\Gamma = 1$, $K = B$ и (9) выполняется. Предположим, что формула (9) установлена для всех графов с меньшим количеством ребер, чем наш граф G. Удалим из G произвольное ребро e. Если ребро e было мостом, то количество граней не изменится, а компонент связности — увеличится на 1. Если оно е было мостом, то количество граней уменьшится на 1, а количество компонент связности не изменится. В обоих случаях обе части (9) изменятся на одну и ту же величину, так что истинность формулы (9) для нового графа влечет ее для G, что и требовалось. □

Формула Эйлера — основной инструмент работы с плоскими графами.

Теорема 25. *В любом плоском (а стало быть, и планарном) графе выполняется оценка*

$$P \leq 3B - 6. \tag{10}$$

В плоском графе без треугольников оценка может быть улучшена до

$$P \leq 2B - 4. \tag{11}$$

Доказательство. Заметим, что в каждой грани не менее 3 ребер, при этом каждое ребро входит не более чем в две грани. Считая количество пар (грань, ребро этой грани) двумя способами получаем $2P \geq 3\Gamma$ю Отсюда $\Gamma \leq 2P/3$. Подставляя это неравенство в неравенство $2 \leq B - P + \Gamma$, очевидно следующее из формулы Эйлера (9), получаем, что $2 \leq B - P + 2P/3 = B - P/3$, откуда $P \leq 3B - 6$. Для графа без треугольников доказательство аналогично, нужно лишь в начале заметить, что в каждой граней не менее 4 ребер, откуда $2P \geq 4\Gamma$. □

Следствие. *В любом планарном графе найдется вершина степени не больше, чем 5. В любом планарном графе без треугольников найдется вершина степени не больше, чем 3.*

Доказательство. Достаточно заметить, что среднее арифметическое степеней вершин графа равно $2P/B$ и применить оценки (10), (11) □

Теорема 26. *Графы K_5 (полный граф с 5 вершинами) и $K_{3,3}$ (полный двудольный граф с долями по три вершины) непланарны.*

Доказательство. Для этих графов не выполняются оценки (10), (11) соответственно. □

Глубокая теорема Понтрягина-Куратовского утверждает, что наличие K_5 или $K_{3,3}$ — не только достаточное, но и необходимое условие непланарности графа.

Будем называть **подразбиением** графа такую процедуру, повторенную несколько раз: ребро uv заменяем на путь uwv, где w — новая вершина (степени 2). Два графа будем называть **гомеоморфными**, если их можно подразбить так, что они станут изоморфны.

Ясно, что два гомеоморфных графа планарны или нет одновременно.

Теорема 27 (Понтрягин, Куратовский)**.** *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 и $K_{3,3}$.*

Доказательство теоремы можно изучить, например, по популярной статье А. Б. Скопенкова (http://www.mccme.ru/free-books/matpros/ia116128.pdf.zip).

Типичный пример планарного графа — граф вершин и ребер выпуклого многогранника в трехмерном пространстве. Его несложно изобразить на плоскости с помощью следующей конструкции: берем точку P близко к внутренней точке Q некоторой грани α многогранника и проектируем многогранник из P на α центрально. Поскольку каждый луч, выходящий из P, пересекает многогранник 0 или 2 раза, и если два раза, то один раз — в точке грани α, мы получим в плоскости α плоскую картинку.

Если G — плоский граф, можно определить **двойственный граф** G', вершины которого соответствуют граням графа G. Именно, поместим в каждую грань графа G по точке и соединим ребром точки, находящиеся в соседних (по ребру) гранях. Если граф G был связным и трехсвязным, то в G' количество вершин равно количеству граней G; количество граней — количеству вершин G; количества ребер графов G и G' совпадают. Граф, двойственный к G', в этом случае совпадает с G. В действительности каждый связный трехсвязный плоский граф есть граф ребер некоторого выпуклого многогранника.

Заметим, что граф, изображенный без пересечений ребер на сфере, также является планарным. Это следует, например, из того, что сфера при стереографической проекции (из северного полюса на касательную плоскость в южном полюсе) переходит в плоскость.

Применим формулу для Эйлера для доказательства следующего базового утверждения теории геометрических конфигураций.

Теорема 28 (Задача Сильвестра)**.** *На плоскости проведено несколько (конечное число) прямых так, что через точку пересечения любых двух прямых проходит еще хотя бы одна прямая. Тогда все прямые имеют общую точку.*

Доказательство. Выберем точку O вне плоскости и для каждой из наших прямых ℓ рассмотрим плоскость (O, ℓ). Рассмотрим также сферу с центром O. Наши плоскости высекают на ней большие круги, и по предположению через точку пересечения любых двух проходит еще хотя бы один. Но тогда в полученном графе степень каждой вершины не менее 6. Это невозможно для планарных графов без кратных ребер. Но кратные ребра могут представлять собой только дуги разных полуокружностей, соединяющих диаметрально противоположные точки. А это возможно лишь в случае, когда все прямые проходят через одну точку. □

Вероятно, самым знаменитым утверждением теории графов является следующая

Теорема 29 (Гипотеза четырех красок)**.** *Любой плоский граф можно правильно покрасить в 4 цвета.*

Известные доказательства этой теоремы существенно опираются на компьютерный перебор большого числа вариантов. Поиск человеческого доказательства все еще ведется.

Гораздо проще доказать следующий более слабый результат.

Теорема 30 (Теорема о пяти красках). *Любой плоский граф можно правильно покрасить в 5 цветов.*

Доказательство. Индукция по числу вершин. База очевидна. Пусть для графов с меньшим числом вершин, чем наш граф G, утверждение доказано. Докажем для G. Выберем в G вершину a, степень которой не превосходит 5. Пользуясь индукционным предположением, покрасим весь граф без a в цвета 1,2,3,4,5 правильным образом. Если среди соседей вершины a нет вершин всех пяти цветов, просто докрасим a. В противном случае у a есть 5 соседей, и они покрашены в цвета от 1 до 5. Можно считать, что порядок цветов соответствует порядку выходящих из a ребер против часовой стрелки. Соседа a, покрашенного в цвет i, назовем v_i $(1 \leq i \leq 5)$. Заметим, что для либо пара вершин v_1, v_3 не соединяется цепочкой, в которой чередуются цвета вершин 1 и 3, либо аналогичное верно для цветов 2 и 4. В самом деле, такие цепочки должны были бы пересечься, что невозможно. Если цепочки нет, например, для цветов 1 и 3, то можно рассмотреть все вершины цветов 1 и 3, до которых можно добраться от вершины v_1 по чередующимся цепочам цветов 1 и 3, и поменять в этом множестве вершин цвета 1 и 3 местами. Вершина v_3 останется цвета 3, и мы сможем покрасить a в цвет 1. □

Теория Рамсея

Теория Рамсея — большая и важная область математики, основанная на той парадигме, что *в достаточно большой структуре, об устройстве которой ничего не предполагается, можно найти подструктуру, устроенную некоторым регулярным образом.*

Самый простой пример утверждения в таком стиле: из шести людей всегда можно выбрать либо троих, попарно знакомых, либо троих, попарно незнакомых. Доказательство: возьмем одного из людей, Васю, у него есть либо хотя бы трое знакомых, либо хотя бы трое незнакомых. В первом случае (второй аналогичен) заметим, что любо какие-то двое из Васиных знакомых знакомы — тогда имеем трех попарно знакомых, либо никакие два не знакомы — тогда имеем трех попарно незнакомых.

Основная теорема, которую мы докажем, обобщает приведенное утверждение в нескольких направлениях. Во-первых, мы будем рассматривать не пары людей (ребра графа знакомств), а наборы людей по k (k-гиперребра). Во-вторых, мы мы будем красить эти гиперребра не в два цвета (знакомы-незнакомы), а в m цветов. Наконец, искать мы будем подмножество заранее выбранной мощности, в котором все гиперребра одного цвета.

Именно, дадим следующее

Определение. *Будем говорить, что натуральное число N обладает свойством Рамсея $\mathcal{R}(k; m_1, \ldots, m_d)$, если для любой покраски всех k-элементных подмножеств N-элементного множества M в d цветов $1, \ldots, i$ найдется номер i и подмножество $A \subset M$, $|A| = m_i$, такое, что все k-элементные подмножества множества A покрашены в цвет i. Наименьшее из натуральных чисел, удовлетворяющих свойству $\mathcal{R}(k; m_1, \ldots, m_d)$, будем обозначать $R(k; m_1, \ldots, m_d)$ и называть* ***числом Рамсея*** *для данного набора параметров.*

Например, приведенное выше утверждение о шести людях может быть сформулировано так: $R(2; 3, 3) \leq 6$. (Легко видеть, что на самом деле $R(2; 3, 3) = 6$.)

Совершенно не очевидно а приори, что свойству Рамсея с данными параметрами вообще удовлетворяет хотя бы одно число. Это утверждает следующая фундаментальная

Теорема 31 (Теорема Рамсея). *Для любых натуральных чисел k, $m_1, \ldots, m_d$ найдется натуральное N, удовлетворяющее свойству $\mathcal{R}(k; m_1, \ldots, m_d)$. Иными словами, число $R(k; m_1, \ldots, m_d)$ существует и конечно.*

Доказательство. Во-первых отметим, что:

(i) $R(1; m_1, \ldots, m_d) = \sum m_i - d + 1$ для любых натуральных $m_1, \ldots, m_d$. В самом деле, речь идет о покраске просто элементов множества, и отсутствие одноцветного множества A мощности m_i и цвета i означает, что в цвет i покрашено не более чем $m_i - 1$ элементов. Это возможно, если всего элементов не больше, чем $\sum m_i - d$, и невозможно в противном случае.

(ii) Если $\min(m_1, \ldots, m_d) < k$, то $R(1; m_1, \ldots, m_d) = \min(m_1, \ldots, m_d)$. Это сразу следует из того, что при $m_i < k$ любое множество мощности m_i нам подойдет в качестве A.

Будем вести двойную индукцию: во-первых по k (база тут есть (i)), а во-вторых по $\sum m_i$ (при фиксированном k), тут базой будет (ii).

Итак, предположим, что числа Рамсея конечны при меньших значениях k и при данном k при меньшем значении $\sum m_i$. Докажем, что конечно $R(k; m_1, \ldots, m_d)$. Если $\min(m_1, \ldots, m_d) < k$, то это уже доказано, так что пусть $\min(m_1, \ldots, m_d) \geq k$. Обозначим $Q_1 = R(k; m_1 - 1, m_2, \ldots, m_d)$, аналогично определим остальные Q_i $(i = 2, \ldots, d)$. Эти числа существуют и конечны по индукционному предположению. Положим также $N = 1 + R(k-1; Q_1, \ldots, Q_d)$. Согласно внешнему индукционному предположению (которое по k), число N также конечно. Докажем, что $R(k; m_1, \ldots, m_d) \leq N$, то есть что N удовлетворяет свойству $\mathcal{R}(k; m_1, \ldots, m_d)$. Рассмотрим N-элементное множество M, k-элементные подмножества которого покрашены в цвета от 1 до d. Зафиксируем элемент $a \in M$ и каждое множество $A \subset M \setminus a =: M_1$ мощности $k-1$ покрасим в тот цвет i, в который покрашено множество $a \cup A$ в M. Получим покраску $(k-1)$-элементных подмножеств множества M_1 в цвета от 1 до i. Поскольку $N-1$ выбрано удовлетворяющим свойству $\mathcal{R}(k-1; Q_1, \ldots, Q_d)$, мы можем найти в M_1 подмножество A мощности Q_i, все $(k-1)$-элементные подмножества которого имеют цвет i. Не умаляя общности, считаем что $i = 1$. Тогда в A найдется (в силу определения Q_i) подмножество либо подмножество мощности m_i, все k-элементные подмножества которого имеют цвет i, для некоторого номера $i \in \{2, \ldots, d\}$; либо подмножество мощности $m_1 - 1$, все k-элементные подмножества которого имеют цвет 1. В первом случае сразу имеем то, что нужно. Во втором случае имеем то, что нужно, после добавления к найденному подмножеству мощности $m_1 - 1$ элемента a. □

Число $R(2; k, m)$ часто обозначают просто $R(k, m)$. По доказанному $R(1, m) = 1$ и $R(k, m) \leq R(k-1, m) + R(k, m-1)$. Отсюда по индукции получаем оценку

$$R(k, m) \leq \binom{k+m-2}{k-1}. \tag{12}$$

Приведем два применения теоремы Рамсея — в теории чисел и в геометрии.

Теорема 32 (Шур). *Если натуральный ряд покрашен в конечное число цветов, то уравнение $x + y = z$ имеет одноцветное решение.*

Доказательство. Рассмотрим полный граф, вершины которого суть натуральные числа и покрасим ребро (i, j) в тот цвет, в который покрашено число $|i - j|$. По теореме Рамсея в этом графе найдется одноцветный треугольник, то есть три числа $a < b < c$ такие, что числа $x = b - a, y = c - b, z = c - a$ одного цвета. Что и требовалось. Как видим, достаточно даже ограниченного (но зависящего, разумеется, от количества цветов) отреза натурального ряда. □

Теорема 33 (Эрдеш, Секереш). *Для любого натурального k найдется такое N, что из любых N точек на плоскости общего положения (никакие 3 не лежат на одной прямой) найдется k, являющихся вершинами выпуклого k-угольниа.*

Доказательство. Будем говорить про набор вершин выпуклого многоугольника, что это точки в выпуклом положении, про другие наборы точек будем говорить, что они находятся в невыпуклом положении.

Нам понадобятся два простых утверждения:

(i) Из любых пяти точек общего положения найдутся 4 в выпуклом положении.

В самом деле, если выпуклая оболочка нашей пятерки точек это четырехугольник или пятиугольник, то все ясно, если же это треугольник ABC с точками D, E внутри, то прямая DE пересекает какие-то две стороны треугольника ABC, например AB и AC, и тогда B, C, D, E в выпуклом положении.

(ii) Если из $k \geq 4$ точек любые 4 лежат в выпуклом положении, то все лежат в выпуклом положении. Действительно, в противном случае какая-то точка P попадет внутрь выпуклой оболочки остальных. Если A — вершина выпуклой оболочки, то луч AP повторно пересечет некоторую сторону BC выпуклой оболочки, и тогда A, B, C, P не будут в выпуклом положении.

Теперь ясно, что годится $N = R(4; 5, k)$. В самом деле, крася четверку точек в первый цвет, если она в невыпуклом положении, и во второй — если в выпуклом, мы найдем либо 5 точек, для которых все четверки первого цвета (что невозможно по (i)), либо k точек таких, что все четверки второго цвета, что нам и нужно по (ii).

□