

# Лекция 5

## Байесовские методы классификации

---

Екатерина Тузова

# Разбор летучки

---



## Мотивирующий пример

---

# Классификация сообщений

Датасет **20 newsgroups** содержит почти 20000 сообщений из списков рассылки Usenet.

# Классификация сообщений

Датасет **20 newsgroups** содержит почти 20000 сообщений из списков рассылки Usenet.

Примеры сообщений из списка рассылки sci.crypt:

*When you find out a floppy password protect program,  
could you e-mail me.*

*Thanks*

*Not to mention Computer Associates. I'll have to be careful  
to stop telling people I'm a Clipper programmer, they might  
lynch me... :-)*

# Классификация сообщений

Датасет **20 newsgroups** содержит почти 20000 сообщений из списков рассылки Usenet.

Примеры сообщений из списка рассылки sci.crypt:

*When you find out a floppy password protect program,  
could you e-mail me.*

*Thanks*

*Not to mention Computer Associates. I'll have to be careful  
to stop telling people I'm a Clipper programmer, they might  
lynch me... :-)*

**Задача:** Построить классификатор, предсказывающий по тексту сообщения список рассылки, в который оно было отправлено.

# Вероятностная постановка задачи

$X$  – множество объектов

$Y$  – множество меток классов

$X \times Y$  – вероятностное пространство с плотностью

$$p(x, y) = P_y p(x|y)$$

$P_y$  – априорная вероятность класса  $y$

$p(x|y)$  – функция правдоподобия класса  $y$



# Вероятностная постановка задачи

$X$  – множество объектов

$Y$  – множество меток классов

$X \times Y$  – вероятностное пространство с плотностью

$$p(x, y) = P_y p(x|y)$$

$P_y$  – априорная вероятность класса  $y$

$p(x|y)$  – функция правдоподобия класса  $y$

**Задача:** Построить алгоритм  $a : X \rightarrow Y$ , минимизирующий **вероятность** ошибки.

Как правило, априорные вероятности  $P_y$  и функции правдоподобия классов  $p(x|y)$  неизвестны.

Как правило, априорные вероятности  $P_y$  и функции правдоподобия классов  $p(x|y)$  неизвестны.

2 подзадачи:

1. По выборке  $X^l$  из неизвестного распределения с плотностью  $p(x, y)$  построить оценки вероятностей  $\hat{P}_y$  и функций правдоподобия  $\hat{p}(x|y)$  для каждого класса
2. По известным  $P_y$  и  $p(x|y)$  построить функцию  $a(x)$ , минимизирующую вероятность ошибочной классификации

Предположим, что нам известно заранее распределение с плотностью  $p(x, y)$ . Как оценить вероятность ошибочной классификации для произвольного алгоритма  $a : X \rightarrow Y$ ?

$\lambda_{ys}$  – штраф за назначение класса  $s$  объекту  $y$

$\lambda_{ys}$  – штраф за назначение класса  $s$  объекту  $y$

**Полезные** нам значения  $\lambda_{ys}$  такие, что  $\lambda_{yy} = 0$  и  $\lambda_{ys} > 0$  для всех  $y \neq s$ .

$\lambda_{ys}$  – штраф за назначение класса  $s$  объекту  $y$

**Полезные** нам значения  $\lambda_{ys}$  такие, что  $\lambda_{yy} = 0$  и  $\lambda_{ys} > 0$  для всех  $y \neq s$ .

Функционал среднего риска алгоритма  $a$ :

$$R(a) = \sum_{s \in Y} \sum_{y \in Y} \lambda_{ys} P_y p(A_s | y) \quad p(A_s | y) = \int_{A_s} p(x|y) dx$$

$A_s = \{x \in X | a(x) = s\}$  – множество объектов класса  $y$ , которым алгоритм ошибочно назначил класс  $s$

Функционал среднего риска алгоритма  $a$ :

$$R(a) = \sum_{s \in Y} \sum_{y \in Y} \lambda_{ys} P_y p(A_s | y) \quad p(A_s | y) = \int_{A_s} p(x|y) dx$$

$A_s = \{x \in X | a(x) = s\}$  – множество объектов класса  $y$ , которым алгоритм ошибочно назначил класс  $s$



Функционал среднего риска алгоритма  $a$ :

$$R(a) = \sum_{s \in Y} \sum_{y \in Y} \lambda_{ys} P_y p(A_s | y) \quad p(A_s | y) = \int_{A_s} p(x|y) dx$$

$A_s = \{x \in X | a(x) = s\}$  – множество объектов класса  $y$ , которым алгоритм ошибочно назначил класс  $s$

$\lambda_{ys} = [y \neq s]$ , то  $R(a)$  – вероятность ошибки алгоритма  $a(x)$

Минимум среднего риска  $R(a)$  достигается при:

$$a(x) = \arg \min_{s \in Y} \sum_{y \in Y} \lambda_{ys} P_y p(x|y)$$

# Оптимальный Байесовский классификатор

Минимум среднего риска  $R(a)$  достигается при:

$$a(x) = \arg \min_{s \in Y} \sum_{y \in Y} \lambda_{ys} P_y p(x|y)$$

Пусть величина штрафа зависит только от класса  $y$ , т.е.  $\lambda_{yy} = 0$  и  $\lambda_{ys} = \lambda_y$ , тогда оптимальный алгоритм:

$$a(x) = \arg \max_{y \in Y} \lambda_y P_y p(x|y)$$

Апостериорная вероятность класса  $y$  для объекта  $x$ :

$$P(y|x) = \frac{p(x, y)}{p(x)} = \frac{P_y p(x|y)}{\sum_{s \in Y} P_s p(x|s)} \propto P_y p(x|y)$$

Апостериорная вероятность класса  $y$  для объекта  $x$ :

$$P(y|x) = \frac{p(x, y)}{p(x)} = \frac{P_y p(x|y)}{\sum_{s \in Y} P_s p(x|s)} \propto P_y p(x|y)$$

Тогда оптимальный алгоритм выглядит так:

$$a(x) = \arg \max_{y \in Y} \lambda_y P(y|x)$$

$$a(x) = \arg \max_{y \in Y} \lambda_y P(y|x)$$

Если  $\lambda_y = 1$ , то алгоритм максимизирует апостериорную вероятность для объекта  $x$ .

# Наивность

---

Чего еще не хватает для **работающего** классификатора?



1. Что представляют из себя  $X$  и  $Y$  для сообщений из списков рассылки

# На полпути к классификатору

1. Что представляют из себя  $X$  и  $Y$  для сообщений из списков рассылки
2. Выбрать функции правдоподобия  $p(x|y)$

# На полпути к классификатору

1. Что представляют из себя  $X$  и  $Y$  для сообщений из списков рассылки
2. Выбрать функции правдоподобия  $p(x|y)$
3. Научиться оценивать априорные вероятности классов  $\hat{P}_y$  и функции правдоподобия  $\hat{p}(x|y)$  из данных

$V = v_1, \dots, v_{|V|}$  – упорядоченное множество слов

Сообщение можно представить в виде вектора, в котором на  $j$ -ой позиции стоит 1, если  $v_d$  встречается в сообщении, и 0 в противном случае

$X \equiv \{0, 1\}^{|V|}$ , а  $Y$  это множество идентификаторов рассылки

V = who, I, let, dogs, out, the

$V = \text{who, I, let, dogs, out, the}$

Сообщение «Who let the dogs out? Who, who, who, who?» будет векторизовано как  $[1, 0, 1, 1, 1, 1]$ .

$V = \text{who, I, let, dogs, out, the}$

Сообщение «Who let the dogs out? Who, who, who, who?» будет векторизовано как  $[1, 0, 1, 1, 1, 1]$ .

Как будет векторизовано предложение «Well, if I am a dog, the party is on [...]»?

Как определить функцию правдоподобия для сообщения, представленного в виде бинарного вектора?



**Идея:** Будем использовать дискретное распределение на множестве  $X$ , то есть сопоставим вероятность  $\theta_{yx}$  каждому значению  $x \in X$ , тогда

$$p(x|y) = \theta_{yx}$$

**Идея:** Будем использовать дискретное распределение на множестве  $X$ , то есть сопоставим вероятность  $\theta_{yx}$  каждому значению  $x \in X$ , тогда

$$p(x|y) = \theta_{yx}$$

Какие проблемы у такой функции правдоподобия?

# Функция правдоподобия

Предположим, что все признаки (компоненты вектора  $x$ ) независимы **при условии**  $y$ , тогда:

$$p(x|y) = \prod_{d=1}^{|V|} p(x_d|y)$$

# Функция правдоподобия

Предположим, что все признаки (компоненты вектора  $x$ ) независимы **при условии**  $y$ , тогда:

$$p(x|y) = \prod_{d=1}^{|V|} p(x_d|y)$$

Полученный классификатор называют **наивным** Байесовским классификатором из-за наивности сделанного предположения

$$a(x) = \arg \max_{y \in Y} \lambda_y P_y \prod_{d=1}^{|V|} p(x_d|y)$$

Распределение Бернулли – дискретное распределение на множестве  $0, 1$  с параметром  $\theta \in [0, 1]$  — вероятностью **успеха** и функцией вероятности:

$$Ber(x; \theta) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x}$$

# Распределение Бернулли

Распределение Бернулли – дискретное распределение на множестве  $0, 1$  с параметром  $\theta \in [0, 1]$  — вероятностью **успеха** и функцией вероятности:

$$\text{Ber}(x; \theta) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x}$$

$$p(x|y) = \prod_{d=1}^{|V|} \theta_{yd}^x (1 - \theta_{yd})^{1-x}$$

Метод позволяет оценивать параметры функций правдоподобия по выборке  $X^l$ .

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^l \ln p(x_i; \theta) \rightarrow \max_{\theta}$$

Как записать условие оптимума?

$$\frac{\partial}{\partial \theta} L(\theta) = \sum_{i=1}^l \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(x_i, \theta) = \sum_{i=1}^l \frac{x_i}{\theta} + \frac{1 - x_i}{\theta - 1} = 0$$



$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \theta} L(\theta) &= \sum_{i=1}^l \frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(x_i, \theta) = \sum_{i=1}^l \frac{x_i}{\theta} + \frac{1-x_i}{\theta-1} = 0 \\ \Rightarrow \hat{\theta}_{ML} &= \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l x_i\end{aligned}$$

# Наивный Байесовски классификатор

$$\hat{P}_y = \frac{\sum_{i=1}^l [y_i = y]}{l}$$
$$\hat{\theta}_{yd} = \frac{\sum_{i=1}^l [y_i = y] x_{id}}{\sum_{i=1}^l [y_i = y]}$$

# Наивный Байесовски классификатор

$$\hat{P}_y = \frac{\sum_{i=1}^l [y_i = y]}{l} \quad \hat{\theta}_{yd} = \frac{\sum_{i=1}^l [y_i = y] x_{id}}{\sum_{i=1}^l [y_i = y]}$$

$$a(x) = \arg \max_{y \in Y} \lambda_y \hat{P}_y \prod_{d=1}^{|V|} \text{Ber}(x_{id}; \hat{\theta}_{yd})$$

## Пример

$y \in Y$	$\hat{P}_y$	password	program	PGP
sci.crypt	0.4	0.8	0	1
comp.graphics	0.6	0.2	0.6	0

## Пример

$y \in Y$	$\hat{P}_y$	password	program	PGP
sci.crypt	0.4	0.8	0	1
comp.graphics	0.6	0.2	0.6	0

Какой класс будет назначен сообщению  
«How should I add PGP support to my program?»,  
если  $\forall y \in Y (\lambda_y = 1)$ ?

## Пример

$y \in Y$	$\hat{P}_y$	password	program	PGP
sci.crypt	0.4	0.8	0	1
comp.graphics	0.6	0.2	0.6	0

Какой класс будет назначен сообщению  
«How should I add PGP support to my program?»,  
если  $\forall y \in Y (\lambda_y = 1)$ ?

$$\begin{aligned} a(x) &= \arg \max_{y \in Y} \hat{P}(y|x = [0, 1, 1]) \\ &= \arg \max_{y \in Y} \{\hat{p}(\text{sci.crypt}|x), \hat{p}(\text{comp.graphics}|x)\} \\ &= \arg \max_{y \in Y} \{0, 0\} \end{aligned}$$

**Идея:** Введем параметр  $\alpha \geq 0$  и добавим его в ОМП для распределения Бернулли.

$$\hat{\theta}_{yd}^* = \frac{\sum_{i=1}^l [y_i = y] x_{id} + \alpha}{\sum_{i=1}^l [y_i = y] + 2\alpha}$$

Если в обучающей выборке много представителей класса  $y$ , содержащих слово  $v_d$ , то  $\hat{\theta}_{yd}^*$  будет стремиться к ОМП, в обратном случае  $\hat{\theta}_{yd}^* \approx \frac{1}{2}$

Фреквентистский подход предполагает, что параметры распределения некоторой случайной величины – это фиксированные (но, возможно, неизвестные) значения.



# Фреквентистский и Байесовский подходы

Фреквентистский подход предполагает, что параметры распределения некоторой случайной величины – это фиксированные (но, возможно, неизвестные) значения.

Байесовский подход считает все величины случайными, то есть у параметров тоже есть распределение:

$$p(x|\theta) = \text{Ber}(x|\theta) \quad p(\theta) = \text{Beta}(\theta|\alpha, \beta)$$

Таким образом, при Байесовском подходе нас интересует не точечная оценка параметра  $\hat{\theta}$ , а его апостериорное распределение:

# Фреквентистский и Байесовский подходы

Фреквентистский подход предполагает, что параметры распределения некоторой случайной величины – это фиксированные (но, возможно, неизвестные) значения.

Байесовский подход считает все величины случайными, то есть у параметров тоже есть распределение:

$$p(x|\theta) = \text{Ber}(x|\theta) \quad p(\theta) = \text{Beta}(\theta|\alpha, \beta)$$

Таким образом, при Байесовском подходе нас интересует не точечная оценка параметра  $\hat{\theta}$ , а его апостериорное распределение:

$$p(\theta|x) = \frac{p(\theta)p(x|\theta)}{\int p(\theta)p(x|\theta)d\theta} \propto p(\theta)p(x|\theta)$$

**Наблюдение:** Часто можно выбрать априорное распределение  $p(\theta)$  таким образом, чтобы апостериорное распределение  $p(\theta|x)$  имело тот же вид, что и априорное, только с другими параметрами.

# Сопряжённое априорное распределение

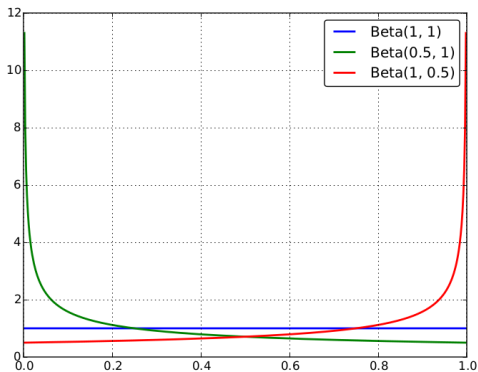
**Наблюдение:** Часто можно выбрать априорное распределение  $p(\theta)$  таким образом, чтобы апостериорное распределение  $p(\theta|x)$  имело тот же вид, что и априорное, только с другими параметрами.

Семейство распределений  $p(\theta|\alpha)$  называется априорным сопряжённым для семейства функций правдоподобия  $p(x|\theta)$ , если апостериорное распределение  $p(\theta|x, \alpha)$  остаётся в том же семействе:

$$p(\theta|x, \alpha) \propto p(\theta)p(x|\theta) = p(\theta|\alpha^*)$$

$\alpha$  и  $\alpha^*$  – это гиперпараметры, то есть параметры распределения параметров.

# Бета-распределение



$$p(\theta|\alpha, \beta) = \frac{\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} \quad B(\alpha, \beta) = \int_0^1 \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1} d\theta$$

Бета-распределение является априорным сопряжённым для распределения Бернулли

$$\begin{aligned} p(\theta|x, \alpha, \beta) &\propto p(\theta|\alpha, \beta)p(x|\theta) \\ &\propto (\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1})(\theta^x(1-\theta)^{1-x}) \\ &\propto \theta^{(\alpha+x)-1}(1-\theta)^{\beta+1-x} = \text{Beta}(\theta|\alpha^*, \beta^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \int_0^1 \theta p(\theta|x, \alpha, \beta) d\theta = \mathbb{E}[Beta(\theta|\alpha^*, \beta^*)] \\ &= \frac{\alpha^*}{\alpha^* + \beta^*} = \frac{\alpha + x}{\alpha + \beta + 1}\end{aligned}$$

Если  $\alpha = \beta$ , то  $\hat{\theta}$  в точности совпадает со сглаженной оценкой  $\hat{\theta}^*$

+ Просто реализовать и использовать



- + Просто реализовать и использовать
- + Можно обучать по потоку данных

Вопросы?

## На следующей лекции

- Перцептрон
- Функция потерь
- Преоброессинг
- Ошибка обобщения