Первый курс, весенний семестр
Практика по алгоритмам #14:
Быстрое преобразование Фурье

Contents

Новые задачи

1. **Возведение в степень.**
   За какое время можно посчитать 2^n в десятичной системе счисления?
2. **Поиск с ошибками.**
   Даны текст t и строка s над алфавитом размера k. Для каждого из $|t| - |s| + 1$ наложений s на t узнать количество ошибок. Время $\mathcal{O}(k|t|\log|t|)$.
3. **Поиск с ошибками и шаблоном.**
   Апгрейд предыдущей задачи. И в тексте, и в строке допустимы символы "?".
4. **Дуэль!**
   В каждой клетки полоски $1 \times n$ или растёт дерево, или нет. За $\mathcal{O}(n \log n)$ найдите количество троек деревьев, подходящих для дуэли (два дуэлянта и секундант). Тройка подходит для дуэли, если расстояния равны.
5. **Уравнение.**
   Даны n и m. Найдите количество троек (x, y, z), решений уравнения $x^n + y^n \equiv z^n \bmod m$
6. **Два в одном!**
   На паре у нас было `FFT` над многочленами с комплексными коэффициентами. Пусть на самом деле коэффициенты – вещественные числа. Например, так будет, если мы пишем длинную арифметику в целых числах. Сделайте два Фурье в одном. Подсказка: $c_j = a_j + i \cdot b_j$, осталось понять, как `FFT(a)` и `FFT(b)` выразить через `FFT(c)`.
7. **Динамика по дереву.**
   Сколько способов вырезать из полного бинарного дерева глубины k поддерево размера s, содержащее корень исходного?
8. **(*) Задача о рюкзаке.**
   Даны n предментов и запросы "можно ли набрать вес w_i, используя только предметы с номерами от l_i до r_i". При этом все $w_i \le s$. Сделайте предподсчёт за $\mathcal{O}(ns\log s)$ так, чтобы на запрос можно было бы в online ответить за $\mathcal{O}(s \log s \log n)$.
9. **(*) Пентоганальная теорема Эйлера.**
   Собственно теорема заключается в том, что $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1 - x^k) = \sum\limits_{q=-\infty}^{\infty}(-1)^q x^{(3q^2+q)/2}$. Рассмотрим $P(x) = p_0 + xp_1 + x^2p_2 + \ldots$, где p_n – число разбиений числа n на возрастающие слагаемые. Заметим, что $P(x) = \prod\limits_{k=1}^{\infty}(1 - x^k)$. Используя эти знания и FFT за $\mathcal{O}(n \log n)$, найдите количество разложений числа n на возрастающие слагаемые по модулю $3 \cdot 2^{18}+1$ (простое). Предложите, как найти само число, а не только остаток от деления. $\mathcal{O}(mn\log n + m^2)$, где m – длина ответа.

Разбор задач

1. **Возведение в степень.**
   Используем алгоритм возведения в степень за $\mathcal{O}(\log n)$,
   получаем $FFT(n) + FFT(\frac{n}{2}) + FFT(\frac{n}{4}) + \cdots = \mathcal{O}(n \log n)$.
2. **Поиск с ошибками.**
   Для каждого символа c рассмотрим строки s_c, t_c из нулей и единиц – совпадает ли очередной символ строки с c. Ответ $= \mathtt{FFT}^{-1}(\sum_c [\mathtt{FFT}(s_c) \cdot FFT(\overleftarrow{t_c})])$
3. **Поиск с ошибками и шаблоном.**
   Символ "?" совпадает с каждым. Достаточно изменить определение s_c, t_c и заметить, что каждый "?" мы учли σ раз.
4. **Дуэль!**
   $b = a^2, res = \sum_i (b_{2i} a_i - a_i a_i)$
5. **Уравнение.**
   $\mathtt{a[}x^n \bmod m\mathtt{]++}$, для всех $x = 0..n{-}1$. Это мы можем сделать за $\mathcal{O}(m \log n)$ и даже за $\mathcal{O}(m)$, используя то, что $(ab)^n = a^n b^n$ (т.е. степень считать нужно только для простых). Далее $b = a^2, res = \sum_i (b_i a_i)$.
6. **Два в одном!**
   $c = a + ib, c' = \mathtt{FFT}(c)$. $c'_j = \sum_t (w^{jt}(a_t + ib_t))$, $\overline{c'_j} = \sum_t (\overline{w^{jt}}(\overline{a_t + ib_t})) = \sum_t (w^{-jt}(a_t - ib_t))$. $c'_{-j} = \sum_t (w^{-jt}(a_t + ib_t))$, $\overline{c'_j} + c'_{-j} = 2 \sum_t w^{jt} a_t = 2a'_j$. $\overline{c'_j} - c'_{-j} = 2b'_j$.
7. **Динамика по дереву.**
   Пересчёт – умножение многочленов. $T(k) = 2T(\frac{k}{2}) + k2^k = \Theta(k^2 2^k)$.
8. **(*) Задача о рюкзаке.**
   Насчитаем дерево отрезков из $2n$ вершин. Пересчёт – Фурье. Ответ на запрос – запрос к дереву отрезков, это $\log n$ Фурье.
9. **(*) Пентоганальная теорема Эйлера.**
   Найдём обратный к многочлену из пентагональной теоремы Эйлера за $\mathcal{O}(n \log n)$.

Домашнее задание

Обязательная часть

1. (4) **Обратное по модулю.**
   Найти к числу x $(0 \le x < m)$ обратное по модулю m за $\mathcal{O}(\log^2 m)$.
2. (4) **AVL деревья.**
   Найти количество AVL деревьев глубины h из n вершин по модулю $3 \cdot 2^{18} + 1$ за $\mathcal{O}(nh + n \log n)$.
3. (3) **Циклические сдвиги.**
   Даны A, B, $|A| = |B| = n$. Найти D – такой циклический сдвиг B,
   что скалярное произведение A и D максимально.
4. (3) **Поиск подкартинки.**
   Даны две картины, заданные 256 оттенками серого. То есть даны матрицы целых чисел a и b. a по обоим размерам больше b. Найти такое наложение матрицы b на a, что суммарное квадратичное отклонение цветов минимально.
   То есть найти такие i, j, что $\sum\limits_{x,y}(a[x,y] - b[x+i, y+j])^2 \to \min$.
5. (3) **Одно `FFT` через несколько `FFT`.**
   Сведите вычисление `FFT` последовательности размера pn к p вычислениям `FFT` от последовательностей размера n и $\mathcal{O}(p^2 n)$ дополнительных операций.

Дополнительная часть

1. (4) Перевод из системы счисления в другую быстрее квадрата.
2. (5) Интерполяция быстрее квадрата.
3. (5) С помощью FFT за $\mathcal{O}^*(2^n)$ найдите покраску вершин неорграфа в k цветов.
4. (5) Количество счастливых билетов из $2n$ цифр за $\mathcal{O}(n \log n)$ операций с числами порядка ответа.
5. (4) Даны строка и текст. Оба могут содержать вопросы.
   Найти точное совпадение за $\mathcal{O}(1)$ вызовов Фурье. Алфавит – не константа!