

Практика по алгоритмам #14: Быстрое преобразование Фурье

1. Возведение в степень.

За какое время можно посчитать 2^n в десятичной системе счисления?

2. Поиск с ошибками.

Даны текст t и строка s над алфавитом размера k . Для каждого из $|t| - |s| + 1$ наложений s на t узнать количество ошибок. Время $\mathcal{O}(k|t| \log |t|)$.

3. Поиск с ошибками и шаблоном.

Апгрейд предыдущей задачи. И в тексте, и в строке допустимы символы “?”.

4. Дуэль!

В каждой клетке полосы $1 \times n$ или растёт дерево, или нет. За $\mathcal{O}(n \log n)$ найдите количество троек деревьев, подходящих для дуэли (два дуэлянта и секундант). Тройка подходит для дуэли, если расстояния равны.

5. Уравнение.

Даны n и m . Найдите количество троек (x, y, z) , решений уравнения $x^n + y^n \equiv z^n \pmod{m}$

6. Два в одном!

На паре у нас было FFT над многочленами с комплексными коэффициентами. Пусть на самом деле коэффициенты – вещественные числа. Например, так будет, если мы пишем длинную арифметику в целых числах. Сделайте два Фурье в одном. Подсказка: $c_j = a_j + i \cdot b_j$, осталось понять, как $\text{FFT}(a)$ и $\text{FFT}(b)$ выразить через $\text{FFT}(c)$.

7. Динамика по дереву.

Сколько способов вырезать из полного бинарного дерева глубины k поддерево размера s , содержащее корень исходного?

8. (*) Задача о рюкзаке.

Даны n предметов и запросы “можно ли набрать вес w_i , используя только предметы с номерами от l_i до r_i ”. При этом все $w_i \leq s$. Сделайте предподсчёт за $\mathcal{O}(ns \log s)$ так, чтобы на запрос можно было бы в online ответить за $\mathcal{O}(s \log s \log n)$.

9. (*) Пентоганальная теорема Эйлера.

Собственно теорема заключается в том, что $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} (-1)^q x^{(3q^2+q)/2}$. Рассмотрим

$P(x) = p_0 + xp_1 + x^2p_2 + \dots$, где p_n – число разбиений числа n на возрастающие слагаемые.

Заметим, что $P(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k)$. Используя эти знания и FFT за $\mathcal{O}(n \log n)$, найдите

количество разложений числа n на возрастающие слагаемые по модулю $3 \cdot 2^{18} + 1$ (простое).

Предложите, как найти само число, а не только остаток от деления. $\mathcal{O}(mn \log n + m^2)$, где m – длина ответа.

Разбор задач

1. Возведение в степень.

Используем алгоритм возведения в степень за $\mathcal{O}(\log n)$, получаем $FFT(n) + FFT(\frac{n}{2}) + FFT(\frac{n}{4}) + \dots = \mathcal{O}(n \log n)$.

2. Поиск с ошибками.

Для каждого символа s рассмотрим строки s_c, t_c из нулей и единиц – совпадает ли очередной символ строки с s . Ответ = $FFT^{-1}(\sum_c [FFT(s_c) \cdot FFT(\overleftarrow{t_c})])$

3. Поиск с ошибками и шаблоном.

Символ “?” совпадает с каждым. Достаточно изменить определение s_c, t_c и заметить, что каждый “?” мы учли σ раз.

4. Дуэль!

$$b = a^2, res = \sum_i (b_{2i}a_i - a_i a_i)$$

5. Уравнение.

$a[x^n \bmod m]++$, для всех $x = 0..n-1$. Это мы можем сделать за $\mathcal{O}(m \log n)$ и даже за $\mathcal{O}(m)$, используя то, что $(ab)^n = a^n b^n$ (т.е. степень считать нужно только для простых). Далее $b = a^2, res = \sum_i (b_i a_i)$.

6. Два в одном!

$$c = a + ib, c' = FFT(c). \quad c'_j = \sum_t (w^{jt}(a_t + ib_t)), \quad \overline{c'_j} = \sum_t (\overline{w^{jt}(a_t + ib_t)}) = \sum_t (w^{-jt}(a_t - ib_t)). \\ c'_{-j} = \sum_t (w^{-jt}(a_t + ib_t)), \quad \overline{c'_j} + c'_{-j} = 2 \sum_t w^{jt} a_t = 2a'_j. \quad \overline{c'_j} - c'_{-j} = 2b'_j.$$

7. Динамика по дереву.

Пересчёт – умножение многочленов. $T(k) = 2T(\frac{k}{2}) + k2^k = \Theta(k^2 2^k)$.

8. (*) Задача о рюкзаке.

Насчитаем дерево отрезков из $2n$ вершин. Пересчёт – Фурье. Ответ на запрос – запрос к дереву отрезков, это $\log n$ Фурье.

9. (*) Пентагональная теорема Эйлера.

Найдём обратный к многочлену из пентагональной теоремы Эйлера за $\mathcal{O}(n \log n)$.

Домашнее задание

Обязательная часть

1. **(4) Обратное по модулю.**

Найти к числу x ($0 \leq x < m$) обратное по модулю m за $\mathcal{O}(\log^2 m)$.

2. **(4) AVL деревья.**

Найти количество AVL деревьев глубины h из n вершин по модулю $3 \cdot 2^{18} + 1$ за $\mathcal{O}(nh + n \log n)$.

3. **(3) Циклические сдвиги.**

Даны A, B , $|A| = |B| = n$. Найти D – такой циклический сдвиг B , что скалярное произведение A и D максимально.

4. **(3) Поиск подкартинки.**

Даны две картины, заданные 256 оттенками серого. То есть даны матрицы целых чисел a и b . a по обоим размерам больше b . Найти такое наложение матрицы b на a , что суммарное квадратичное отклонение цветов минимально.

То есть найти такие i, j , что $\sum_{x,y} (a[x, y] - b[x + i, y + j])^2 \rightarrow \min$.

5. **(3) Одно FFT через несколько FFT.**

Сведите вычисление FFT последовательности размера pn к p вычислениям FFT от последовательностей размера n и $\mathcal{O}(p^2 n)$ дополнительных операций.

Дополнительная часть

1. **(4)** Перевод из системы счисления в другую быстрее квадрата.
2. **(5)** Интерполяция быстрее квадрата.
3. **(5)** С помощью FFT за $\mathcal{O}^*(2^n)$ найдите покраску вершин неорграфа в k цветов.
4. **(5)** Количество счастливых билетов из $2n$ цифр за $\mathcal{O}(n \log n)$.
5. **(4)** Даны строка и текст. Оба могут содержать вопросы.
Найти точное совпадение за $\mathcal{O}(1)$ вызовов Фурье.