

1. QuickSort

Посчитаем точно матожидание числа сравнений, которое делает Quicksort на перестановке из n элементов. Сумма гармонического ряда.

2. Задачи про бинарный поиск

1. Найти корень вещественного числа с использованием стандартных арифметических операций.
2. Найти расстояние от точки до прямой в 3D (в nD).
3. Корни многочлена
 - a) Найти корень многочлена нечетной степени за $\mathcal{O}(\log M)$.
 - b) Зная все корни производной, найти все вещественные корни многочлена за $\mathcal{O}(n \log M)$.
 - c) Найти все вещественные корни многочлена за $\mathcal{O}(n^2 \log M)$.
4. Бинарный поиск на массиве
 - a) Выразить `upper_bound` для целых чисел через `lower_bound`.
 - b) Докажите, что нельзя сделать и `lower_bound`, и `upper_bound` одновременно, используя в худшем случае меньше чем $2 \log_2 n + \mathcal{O}(1)$ сравнений?
 - c) Сделать предподсчет за $\mathcal{O}(n \log n)$, чтобы за $\mathcal{O}(\log n)$ отвечать на запрос “сколько раз число x встречается на отрезке $[l..r]$ ”?

3. Задачи про поиск точки

Каждую из предложенных задач можно решить за время $\mathcal{O}(n) + \mathcal{O}(\text{sort})$, тем не менее решения за линию от n на полилогарифм тоже приветствуются. Для разминки предлагается продифференцировать e^x и найти за $\mathcal{O}(n)$ площадь пересечения n прямоугольников со сторонами параллельными осям координат.

1. Даны n точек на прямой x_i . Найти точку x^* :
 - a) $\sum_i |x_i - x^*| \rightarrow \min$
 - b) $\sum_i (x_i - x^*)^2 \rightarrow \min$
 - c) $\max_i |x_i - x^*| \rightarrow \min$
 - d) $\max_i (x_i - x^*)^2 \rightarrow \min$
2. Даны n точек на плоскости (x_i, y_i) . Найти точку (x^*, y^*) :
 - a) $\sum_i [\max(|x_i - x^*|, |y_i - y^*|)] \rightarrow \min$
 - b) $\sum_i [|x_i - x^*| + |y_i - y^*|] \rightarrow \min$
 - c) $\sum_i [(x_i - x^*)^2 + (y_i - y^*)^2] \rightarrow \min$
 - d) $\max_i [\max(|x_i - x^*|, |y_i - y^*|)] \rightarrow \min$
 - e) $\max_i [|x_i - x^*| + |y_i - y^*|] \rightarrow \min$
 - f) $\max_i [(x_i - x^*)^2 + (y_i - y^*)^2] \rightarrow \min$
3. На прямой расположено n точек p_1, p_2, \dots, p_n . Каждая точка имеет вес $w_i \geq 0$. Требуется найти точку q : $\sum_i [w_i \cdot |p_i - q|] \rightarrow \min$.

4. Домашнее задание

4.1. Обязательная часть

- (1) Предложите алгоритм на основе бинарного поиска для поиска остовного дерева графа, в котором максимальный вес ребра минимален.
- (1) Даны n точек на прямой x_i с весами $w_i \geq 0$. Найти точку x^* :
$$\sum_i [w_i(x_i - x^*)^2] \rightarrow \min$$
- (1) Даны n точек на плоскости (x_i, y_i) с весами $w_i \geq 0$. Найти точку (x^*, y^*) :
$$\sum_i [w_i(|x_i - x^*| + |y_i - y^*|)] \rightarrow \min$$
- (2) Даны n точек на плоскости (x_i, y_i) с весами $w_i \geq 0$. Найти точку (x^*, y^*) :
$$\max_i [w_i(|x_i - x^*| + |y_i - y^*|)] \rightarrow \min.$$
 Дополнительный балл можно заработать, решив эту задачу $\mathcal{O}(sort + n)$.
- (3) На прямой расположено n точек p_1, p_2, \dots, p_n . Каждая точка имеет вес $w_i \geq 0$. Выбрать две точки q_1, q_2 :
$$\sum_i [w_i \cdot \min(|p_i - q_1|, |p_i - q_2|)] \rightarrow \min.$$
- (3) Вариация на тему `Pairing heap`: докажите, что если в `DeleteMin` вместо процедуры `Pairing` список $[a_1, \dots, a_n]$ заменить на произвольное паросочетание $[(a_{i_1}, a_{j_1}), \dots, (a_{i_{n/2}}, a_{j_{n/2}})]$, то амортизированное время работы операции `DeleteMin` будет $\mathcal{O}(\sqrt{n})$.

4.2. Дополнительная часть

- (6) Есть n отрезков на окружности. Выбрать максимальное по размеру множество, покрывающее каждую точку не более чем 2 раза.
 - (3 из 6) $\mathcal{O}(n^3)$
 - (4 из 6) $o(n^3)$
 - (6 из 6) $\mathcal{O}(n \cdot Poly(\log n))$
- (4) Даны n точек на плоскости (x_i, y_i) с весами $w_i \geq 0$. Найти точку (x^*, y^*) :
$$\max_i [w_i((x_i - x^*)^2 + (y_i - y^*)^2)] \rightarrow \min.$$
 Требуется решение за линию на полилогарифм.
- (5) На прямой расположено n точек p_1, p_2, \dots, p_n . Каждая точка имеет вес $w_i \geq 0$. Выбрать три точки q_1, q_2, q_3 :
$$\sum_i [w_i \cdot \min(|p_i - q_1|, |p_i - q_2|, |p_i - q_3|)] \rightarrow \min.$$
 Требуется решение за линию на полилогарифм.