Практика по алгоритмам

Всеволод Опарин, Алексей Давыдов

Осень, 2014

1 Практика 1. Асимптотика

1.1 Всопомогательные факты

1. Сумма арифметической прогрессии ($a_{i+1} = a_i + d$): $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$.
2. Сумма геометрической прогрессии: $1 + p + \cdots + p^{n-1} = \frac{p^n-1}{p-1}$, $\sum_{i=0}^{\infty} p^i = \frac{1}{1-p}$. при $0 < p < 1$.
3. Гармонический ряд: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = \log n + O(1)$, $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^{1+\epsilon}} = O(1)$.
4. Оценки на суммы:
   (a) Мажорирование:
   $$\sum_{i=0}^{n} i \le \sum_{i=0}^{n} n = O(n^2).$$
   (b) Разделение на суммы
   $$\sum_{i=0}^{n} i \ge \sum_{i=\lfloor n/2 \rfloor}^{n} \lfloor n/2 \rfloor = \Omega(n^2).$$
   (c) Интегрирование
   $$\Omega(n^2) = \int_0^n x\,dx \le \sum_{i=1}^{n} i \le \int_1^{n+1} x\,dx = O(n^2).$$

1.2 Практика

Асимптотика:

1. n^k и c^n сравнить по O-нотациями.
2. $p(n) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$. Для каких k какие отношения между $p(n)$ и n^k.
3. $\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$?
4. $2^{n+1} = O(2^n)$? $2^{2n} = O(2^n)$?
5. $f(n) = O(f(n)^2)$?
6. $f(n) + g(n) = \Theta(\min(f(n), g(n)))$?
7. $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow \log f(n) = O(\log g(n))$?
8. $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$?

9. $f(n) = f(n/2)$?

10. $f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$?

11. $\log n! = \Theta(n \cdot \log n)$?

Суммы:

1. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = \Omega(\log n)$ через интегралы и разбиения на части.
2. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = O(1)$.
3. $\sum_{k=0}^{\log n} \lceil n/2^k \rceil$.
4. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = ln(\sqrt{n}) + O(1)$.
5. $\sum_{k=0}^{\infty} (k-1)/2^k = ?$.
6. $\prod_{k=1}^{n} (2 \cdot 4^k)$.
7. $\prod_{k=2}^{n} (1 - 1/k^2)$.

1.3 Домашнее задание

Дедлайн: 23.59 11.09.2014

Группа Давыдова решает все суммы в качестве домашнего задания.

1. Посчитать произведения
   (a) $\prod_{k=1}^{n} (2 \cdot 4^k)$.
   (b) $\prod_{k=2}^{n} (1 - 1/k^2)$.
2. Заполнить табличку.

A	B	O	o	Θ	ω	Ω
$\lg^k n$	n^ϵ					
n^k	c^n					
$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$					
2^n	$2^{n/2}$					
$n^{\lg m}$	$m^{\lg n}$					
$\lg(n!)$	$\lg(n^n)$					

3. Упорядочить функции в порядке возрастания.

$\lg(\lg^* n)$	$2^{lg^* n}$	$(\sqrt{n})^{\lg n}$	n^2	$n!$	$(\lg n)!$
$(3/2)^n$	n^3	$\lg^2 n$	$\lg n!$	2^{2^n}	$n^{1/\lg n}$
$\ln \ln n$	$\lg^* n$	$n \cdot 2^n$	$n^{\lg \lg n}$	$\ln n$	1
$2^{\ln n}$	$(\lg n)^{\lg n}$	e^n	$4^{\lg n}$	$(n+1)!$	$\sqrt{\lg n}$
$\lg^* \lg n$	$2^{\sqrt{2 \lg n}}$	n	2^n	$n \lg n$	$2^{2^{n+1}}$

Примечание: $\lg^*(n) = \begin{cases} 0 & \texttt{если } n \le 1; \\ 1 + \lg^*(\lg n) & \texttt{иначе.} \end{cases}$