Математическая логика и теория вычислимости
Лекция 9. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов

Денис Николаевич Москвин

Кафедра математических и информационных технологий
Санкт-Петербургского академического университета

11.11.2014

План лекции

План лекции

Лемма о свежих константах

- **Лемма (о свежих константах)**. Пусть φ — формула ИП, а c — константа, не входящая в эту формулу. Тогда выводимость $\varphi(x := c)$ влечет выводимость φ.
- **Доказательство**. Возьмем свежую для φ переменную y. Вывод $\varphi(x := c)$ при замене c на y останется выводом: $\vdash \varphi(x := y)$.

$$
\begin{array}{lll}
1 & \varphi(x := y) & \text{Assumption} \\
2 & \forall y \varphi(x := y) & \text{Gen} \\
3 & \forall y \varphi(x := y) \to \varphi(x := y)(y := x) & \text{A12} \\
4 & \varphi(x := y)(y := x) & \text{MP}(2)(3) \\
5 & \varphi &
\end{array}
$$

$\blacksquare$

- Лемма легко обобщается на случай нескольких констант.

Лемма о добавлении констант

- **Лемма (о добавлении констант)**. Пусть φ — формула ИП некоторой сигнатуры σ. Пусть она выводима в сигнатуре σ', полученной из σ добавлением новых констант. Тогда φ выводима в ИП сигнатуры σ.
- **Доказательство**. Если в выводе формулы φ в σ' встречаются новые константы, заменяем их на свежие переменные. ■
- Лемма легко обобщается для произвольного расширения сигнатуры.
- Это означает, что можно говорить о выводимости формулы, не уточняя, в какой сигнатуре мы ищем вывод.

План лекции

Противоречивые теории

- Фиксируем сигнатуру σ и рассмотрим теорию Γ в этой сигнатуре.
- Теория Γ называется *противоречивой*, если в ней выводима некоторая формула и ее отрицание. В противном случае теория называется *непротиворечивой*.
- В противоречивой теориии выводима любая формула:

1	$\Gamma \vdash \varphi$	Assumption
2	$\Gamma \vdash \neg\varphi$	Assumption
3	$\Gamma \vdash \neg \vdash \varphi \to \varphi \to \psi$	A9
4	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	MP(2)(3)
5	ψ	MP(1)(4)

- Любое подмножество непротиворечивого множества непротиворечиво.
- У бесконечного противоречивого множества есть конечное противоречивое подмножество.

Совместность

- Интерпретация M сигнатуры σ называется *моделью* теории Γ, если все формулы из Γ истинны в M.
- **Теорема о корректности ИП (ver.2)**. Все теоремы теории Γ истинны в любой модели M этой теории.
- Множество формул Γ называют *совместным*, если оно имеет модель.
- **Теорема о корректности ИП (ver.3)**. Любое совместное множество замкнутых формул непротиворечиво.
  Доказательство. (от противного) Пусть имеется замкнутая φ, такая что $\Gamma \vdash \varphi$ и $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Но из совместности следует наличие модели M, в которой φ и $\neg\varphi$ должны быть истинны одновременно. ■

Полнота теории

- Теория Γ в сигнатуре σ называется *полной* в этой сигнатуре если для любой замкнутой формулы φ этой сигнатуры либо φ, либо $\neg\varphi$ является теоремой теории Γ:

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \text{or} \quad \Gamma \vdash \neg\varphi$$

- Фиксация сигнатуры важна: если символ S не входит в сигнатуру σ, но используется в формуле ψ, то $\Gamma \nvdash \psi$ и $\Gamma \nvdash \neg\psi$, например

$$\Gamma \nvdash \exists x S(x) \qquad \Gamma \nvdash \neg\exists x S(x)$$

- Замкнутость формулы φ тоже важна: множество истинных формул сигнатуры $(0^0, S^1, =^2)$ полно, но ни $x = y$, ни $\neg(x = y)$ из него не выводимо.

Цель и план

- Цель — доказать, что **любая непротиворечивая теория совместна**.
- Как это делалось в логике высказываний:
  1. расширяли Γ до полного множества $\Delta \supset \Gamma$;
  2. для всякой пропозициональной переменной p полагали

$$p = \mathsf{T}, \quad \text{if } \Delta \vdash p,$$

$$p = \mathsf{F}, \quad \text{if } \Delta \vdash \neg p;$$

  3. показывали, что такое означивание приводит к истинности всех формул Δ (а значит и Γ).
- В логике предикатов будем действовать по той же схеме.
- Однако, у нас будут проблемы с шагом 2: нам нужно будет как-то смонтировать носитель интерпретации.

Лемма о пополнении

- **Лемма (о пополнении).** Всякое непротиворечивое множество Γ сигнатуры σ содержится в непротиворечивом полном множестве Δ той же сигнатуры.
- **Доказательство.** Пусть φ произвольная формула сигнатуры σ. Рассмотрим Γ, φ и $\Gamma, \neg\varphi$. Одно из них непротиворечиво. Действительно, если противоречивы оба, то $\Gamma \vdash \neg\varphi$ и $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi$, что противоречит непротиворечивости Γ. Будем теперь перебирать все допустимые формулы, добавляя к Γ либо формулу, либо отрицание, сохраняя непротиворечивость. ■

Выбор носителя

- Для работы с семантическим понятием совместности нам нужно задать некоторую интерпретацию. Возьмем в качестве носителя T множество всех замкнутых термов нашей сигнатуры σ.
- Функциональные символы при этом интерпретируются "естественным образом": функциональному символу f арности n ставится в соответствие такая функция $[f]$

$$[f]([t_1], \ldots, [t_n]) = [f(t_1, \ldots, t_n)]$$

  Здесь $t_1, \ldots, t_n$ и $f(t_1, \ldots, t_n)$ — замкнутые термы нашей сигнатуры (то есть элементы носителя D).
- Предикатный символ P арности n интерпретируем как предикат $[P]$, который истинен на замкнутых термах $t_1, \ldots, t_n$, если

$$\Gamma \vdash P(t_1, \ldots, t_n)$$

Экзистенциальная полнота теории

- Наша цель — доказать (индуктивно по структуре формулы), что в построенной интерпретации истинны все формулы из Γ.
- Но наша интерпретация может быть слишком бедной: может оказаться, что $\Gamma \vdash \exists x A(x)$, но ни для какого замкнутого терма t формула $A(t)$ не выводима из Γ.
- Теория Γ называется *экзистенциально полной* в сигнатуре σ, если для всякой замкнутой формулы $\exists x \varphi$, являющейся теоремой этой сигнатуры, найдется терм t этой сигнатуры, такой что $\Gamma \vdash \varphi(x := t)$.

Лемма об экзистенциальном пополнении

- **Лемма (об экзистенциальном пополнении).** Пусть Γ — непротиворечивое множество замкнутых формул сигнатуры σ, причем из Γ выводима замкнутая формула $\exists x \varphi$. Пусть c — свежая для Γ и φ константа. Тогда множество $\Gamma, \varphi(x := c)$ непротиворечиво.
- **Доказательство.** Пусть $\Gamma, \varphi(x := c)$ противоречиво. Тогда имеется конечное $\Delta \subset \Gamma$, такое что

1	$\Delta \vdash \neg\varphi(x := c)$	
2	$\Delta \vdash \neg\varphi$	FreshConstLemma
3	$\vdash \bigwedge_i \Delta \to \neg\varphi$	DeductLemma
4	$\vdash \varphi \to \neg(\bigwedge_i \Delta)$	Contraposition
5	$\vdash \exists x \varphi \to \neg(\bigwedge_i \Delta)$	$B\exists$

Но по условию $\Gamma \vdash \exists x \varphi$, значит Δ противоречиво, а значит и Γ. Противоречие. ■

Лемма о расширении

- **Лемма.** Пусть Γ — непротиворечивое множество замкнутых формул сигнатуры σ. Тогда существует расширение сигнатуры σ новыми константами и расширение множества Γ до множества Δ, такого что оно непротиворечиво, полно и экзистенциально полно в расширенной сигнатуре.
- **Доказательство.**
  1. Последовательно применим лемму об экзистенциальном пополнении ко всем замкнутым формулам вида $\exists x \varphi$, выводимым из Γ.
  2. Пополним это множество, применив лемму о пополнении.

  Повторим эти два шага счетное число раз. Объединение полученных множеств будет непротиворечивым, полным и экзистенциально полным. ■

Лемма о существовании модели

Лемма. Пусть Γ — полное и экзистенциально полное множество замкнутых формул сигнатуры σ. Тогда существует интерпретация M сигнатуры σ, в которой истинны все формулы из Γ.

Доказательство. Возьмем в качестве носителя M все замкнутые термы сигнатуры σ. Интерпретация функциональных и предикатных символов описана ранее. Индукцией по числу связок и кванторов формулы φ докажем

$$\Gamma \vdash \varphi \;\Leftrightarrow\; [\varphi] = \mathsf{T}$$

База. Атомарные формулы таковы по построению (см. интерпретацию предикатных символов).

Лемма о существовании модели (продолжение)

Индукционный переход. (пропозициональные связки)
Аналогично доказательству для исчисления высказываний.
Проверяем, что выводимость и истинность “устроены одинаково”

$$\begin{array}{rcl} \Gamma \vdash \neg\varphi & \Leftrightarrow & \Gamma \nvdash \varphi \\ \Gamma \vdash \varphi \vee \psi & \Leftrightarrow & \Gamma \vdash \varphi \text{ or } \Gamma \vdash \psi \\ \Gamma \vdash \varphi \wedge \psi & \Leftrightarrow & \Gamma \vdash \varphi \text{ and } \Gamma \vdash \psi \\ \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi & \Leftrightarrow & \Gamma \nvdash \varphi \text{ and } \Gamma \vdash \psi \end{array}$$

Это легко показать, поскольку любые частные случаи пропозициональных тавтологий выводимы.

Лемма о существовании модели (продолжение 2)

Индукционный переход. (кванторы) Пусть φ имеет вид $\exists x \psi$ (в ψ единственный параметр — x).
($\Rightarrow$) Пусть $\Gamma \vdash \exists x \psi$. Из экзистенциальной полноты Γ следует существование константы c, такой что $\Gamma \vdash \psi(x := c)$. В этой формуле меньше связок, то есть по (IH) в M она истинна: $[\psi(x := c)] = T$. Тогда ψ истинна на оценке $\pi(x) = c$, откуда $[\exists x \psi] = T$.
($\Leftarrow$) Пусть $[\exists x \psi] = T$. Тогда найдется элемент носителя (у нас — замкнутый терм t), для которого $[\psi]_{x:=t} = T$. Отсюда в нашей интерпретации $[\psi(x := t)] = T$. По (IH) $\Gamma \vdash \psi(x := t)$, откуда, используя аксиому 13 $\psi(x := t) \to \exists x \psi$, заключаем, что $\Gamma \vdash \exists x \psi$.
Для $\Gamma \vdash \forall x \psi \;\Leftrightarrow\; [\forall x \psi] = T$ — аналогично. ■

- **Теорема** Непротиворечивое множество замкнутых формул имеет модель.
  Доказательство. Расширяем множество до полного и экзистенциально полного и берем в качестве модели построенную выше интерпретацию $\blacksquare$.
- **Теорема о полноте ИП (сильная форма)** Любая непротиворечивая теория совместна.
- **Теорема о полноте ИП (слабая форма)** Любая общезначимая формула выводима в исчислении предикатов.
  Доказательство. Пусть φ общезначима, замкнута и невыводима. Тогда $\{\neg\varphi\}$ непротиворечиво, а значит имеет модель. В этой модели $[\neg\varphi] = \mathsf{T}$, откуда $[\varphi] = \mathsf{F}$, что противоречит общезначимости φ. $\blacksquare$.

Теорема о компактности

- **Теорема (о компактности)** Пусть Γ — бесконечное множество замкнутых формул сигнатуры σ. Пусть любое его конечное подмножество имеет модель. Тогда само Γ тоже имеет модель.
- **Доказательство.** Наличие модели равносильно непротиворечивости. Но противоречие выводится из конечного числа формул Γ. $\blacksquare$

План лекции

Элементарная эквивалентность

- Две интерпретации заданной сигнатуры σ называют **элементарно эквивалентными**, если в них истинны одни и те же замкнутые формулы данной сигнатуры.
- Взаимно-однозначное отображение $\alpha : D_1 \to D_2$ называется *изоморфизмом* интерпретаций, если оно сохраняет все функции и предикаты этих интерпретаций. А именно для любого предикатного символа P^n и любого функционального символа f^n верно

$$\begin{array}{rcl} [P]_2\,(\alpha(x_1),\ldots,\alpha(x_n)) & \Leftrightarrow & [P]_1\,(x_1,\ldots,x_n) \\ [f]_2\,(\alpha(x_1),\ldots,\alpha(x_n)) & = & \alpha([f]_1\,(x_1,\ldots,x_n)) \end{array}$$

на любых наборах $x_1,\ldots,x_n \in D_1$.
- **Теорема.** Изоморфные интерпретации элементарно эквивалентны.

Теорема об элементарной подмодели

- Пусть имеется интерпретация некоторой сигнатуры с ностиелем D. Рассмотрим подмножество $\mathrm{D}' \subset \mathrm{D}$. Если D' замкнуто относительно сигнатурных функций, то получится новая интерпретация, называемая *подструктурой* исходной.
- **Теорема (Левенгейма-Сколема).** Пусть дана конечная или счетная сигнатура σ и ее бесконечная интерпретация с носителем D. Тогда имеется подструктура со счетным носителем $\mathrm{D}' \subset \mathrm{D}$ элементарно эквивалентная исходной.
- **Доказательство (скетч).** Берем произвольное счетное подмножество, расширяем его до замкнутого относительно сигнатурных функций и экзистенциально замкнутого. Повторяем счетное число раз. ■ (см. Верещагин, Шень, ЯиИ, 3.11)

План лекции

Выразимость предикатов

- Выразимость предиката в некоторой интерпретации некоторой сигнатуры доказать обычно просто: прямым предъявлением.
- Например, сигнатура $(+^2, =^2)$; нормальная интерпретация с носителем $\mathbb{N}$ и $[+] = +$.
- Порядок на натуральных числах (отношение $\leqslant$) мы можем выразить так:

$$x \leqslant y \;\equiv\; \exists z(y = x + z)$$

Выразимость предикатов

- Выразимость предиката в некоторой интерпретации некоторой сигнатуры доказать обычно просто: прямым предъявлением.
- Например, сигнатура $(+^2, =^2)$; нормальная интерпретация с носителем $\mathbb{N}$ и $[+] = +$.
- Порядок на натуральных числах (отношение $\leqslant$) мы можем выразить так:

$$x \leqslant y \;\equiv\; \exists z (y = x + z)$$

- Что будет если поменять носитель на $\mathbb{Z}$?

Выразимость предикатов

- Выразимость предиката в некоторой интерпретации некоторой сигнатуры доказать обычно просто: прямым предъявлением.
- Например, сигнатура $(+^2, =^2)$; нормальная интерпретация с носителем $\mathbb{N}$ и $[+] = +$.
- Порядок на натуральных числах (отношение $\leqslant$) мы можем выразить так:

$$x \leqslant y \;\equiv\; \exists z(y = x + z)$$

- Что будет если поменять носитель на $\mathbb{Z}$?
- Порядок станет невыразимым!

Автоморфизмы

- Пусть дана сигнатура σ и ее интерпретация с носителем D.
- Взаимно-однозначное отображение $\alpha : D \to D$ называется *автоморфизмом* интерпретации, если все функции и предикаты этой интерпретации *устойчивы* относительно α, а именно для любого предикатного символа P^n и любого функционального символа f^n верно

$$\begin{array}{rcl} [P]\left(\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_n)\right) & \Leftrightarrow & [P]\left(x_1, \ldots, x_n\right) \\ [f]\left(\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_n)\right) & = & \alpha([f]\left(x_1, \ldots, x_n\right)) \end{array}$$

  на любых наборах $x_1, \ldots, x_n \in D$.
- Например, отображение $x \mapsto -x$ является автоморфизмом для нормальной интерпретация сигнатуры $(+^2, =^2)$ с носителем $\mathbb{Z}$ и $[+] = +$.

- **Теорема.** Предикат, выразимый в данной интерпретации, устойчив относительно ее автоморфизмов.
- **Доказательство.**
  - Рассмотрим произвольную оценку π и обозначим $\alpha \circ \pi$ новую оценку, полученную применением автоморфизма к π.
  - Индукцией по структуре терма показываем
  $$[t]_{\alpha\circ\pi} \;=\; \alpha\,([t]_{\pi})$$
  - Индукцией по структуре формулы показываем
  $$[\varphi]_{\alpha\circ\pi} \;=\; \alpha\,([\varphi]_{\pi}) \quad \blacksquare$$
- Теперь невыразимость предиката легко доказать, предъявив автоморфизм, относительно которого предикат неустойчив.
- Например, сигнатура $(<^2, =^2)$, носитель $\mathbb{Z}$, естественная интерпретация. Невыразимый предикат $x = 0$. Автоморфизм —

- **Теорема.** Предикат, выразимый в данной интерпретации, устойчив относительно ее автоморфизмов.
- **Доказательство.**
  - Рассмотрим произвольную оценку π и обозначим $\alpha \circ \pi$ новую оценку, полученную применением автоморфизма к π.
  - Индукцией по структуре терма показываем
  $$[t]_{\alpha \circ \pi} \;=\; \alpha\left([t]_{\pi}\right)$$
  - Индукцией по структуре формулы показываем
  $$[\varphi]_{\alpha \circ \pi} \;=\; \alpha\left([\varphi]_{\pi}\right) \quad \blacksquare$$
- Теперь невыразимость предиката легко доказать, предъявив автоморфизм, относительно которого предикат неустойчив.
- Например, сигнатура $(<^2, =^2)$, носитель $\mathbb{Z}$, естественная интерпретация. Невыразимый предикат $x = 0$. Автоморфизм — $x \mapsto x + 42$.