

DL 7.1. Вычислите суммы:

- а) $\sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k}$;
б) $\sum_{k=0}^n (-1)^k k^m \cdot \binom{n}{k}$, где $m < n$.

DL 7.2. Каждая сторона в треугольнике ABC разделена на 8 равных отрезков. Сколько существует различных треугольников с вершинами в точках деления (точки A, B, C не могут быть вершинами треугольников), у которых ни одна сторона не параллельна ни одной из сторон треугольника ABC ?

DL 7.3.

- а) Сколько существует ломанных, идущих из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$ шагами $(1, 1)$ и $(1, -1)$?
б) Покажите, что число ломанных, из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$, пересекающих прямую $y = -1$, равняется числу ломанных из $(0, 0)$ в $(2n, -2)$.
в) Найдите число ломанных из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$, не опускающихся в нижнюю полуплоскость. Это число называется числом Каталана C_n .
г) Покажите, что $C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$.

DL 7.4. Докажите, что множество бесконечных последовательностей, состоящих из цифр $\{0, 1, 2\}$ равномощно множеству бесконечных последовательностей, состоящих из цифр $\{0, 1\}$.

DL 7.5. Докажите, что множество бесконечных последовательностей, состоящих из цифр $\{0, 1\}$ равномощно множеству бесконечных последовательностей натуральных чисел.

DL 7.6.

- а) Докажите, что любое семейство непересекающихся интервалов на прямой конечно или счетно.
б) Докажите, что множество точек строгого локального минимума любой функции из $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ конечно или счетно.

DL 7.7. Докажите, что если множество на плоскости содержит отрезок, то оно равномощно \mathbb{R} .

DL 5.6. Пусть сигнатура содержит предикат равенства и трёхместный предикат S . Интерпретация: носитель — точки на плоскости, $S(X, Y, Z)$ означает, что $|XZ| = |YZ|$. Выразите предикат: A, B, C лежат на одной прямой.

DL 4.2. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = x_1 x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus \dots \oplus x_{2n-1} x_{2n}$. Докажите, что:

- б) размер любого дерева решений для f не меньше 2^n .

DL 4.3. Докажите, что если булева функция вычисляется с помощью ветвящейся программы размера S , то она вычисляется и с помощью булевой схемы размера $O(S)$.

DL 4.4. Покажите, что если булева функция вычисляется с помощью схемы полиномиального от числа входов размера и глубиной $O(\log(n))$, то она вычисляется и формулой

полиномиального от числа переменных размера.

DL 4.5. (Топологическая сортировка) Докажите, что в ориентированном графе $G(V, E)$ без циклов все вершины можно пронумеровать числами от 1 до $|V|$ таким образом, чтобы рёбра шли из вершин с меньшими номерами в вершины с большими номерами.

DL 4.6. Правило *ослабления* позволяет вывести из дизъюнкта A дизъюнкт $A \vee B$ для любого дизъюнкта B . Покажите, что если из дизъюнктов D_1, D_2, \dots, D_n семантически следует дизъюнкт C (это значит, что любой набор значений переменных, который выполняет все дизъюнкты D_i , выполняет также и C), то C можно вывести из D_i с помощью применений правил резолюции и ослабления.

DL 3.3. Как модифицировать рассказанный на лекции алгоритм, проверяющий выполнимость формулы в 2-КНФ, чтобы он за полиномиальное от числа переменных время также выдавал набор значений переменных, который выполняет формулу?

Определение 3.1. Булева функция называется *самодвойственной*, если выполняется равенство $f(1 - x_1, 1 - x_2, \dots, 1 - x_n) = 1 - f(x_1, \dots, x_n)$. Булева функция называется *линейной*, если она имеет вид $f(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \bmod 2$, где $a_i \in \{0, 1\}$.

DL 3.5. (Теорема Поста) Пусть есть набор булевых функций, среди которых есть немонотонная, не сохраняющая ноль (т. е., $f(0, \dots, 0) = 1$), не сохраняющая единицу (т. е., $g(1, \dots, 1) = 0$), нелинейная, несамодвойственная. Докажите, что:

- б) с помощью композиций этих функций можно получить любую булеву функцию;
 - с) если набор булевых функций не удовлетворяет условию теоремы Поста, то через композицию этих функций нельзя выразить все булевы функции.
-

DL 2.2. Булева функция $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ называется *монотонной*, если при $x \leq y$ выполняется $f(x) \leq f(y)$ ($x \leq y$, если для всех $1 \leq i \leq n$ выполняется $x_i \leq y_i$). Докажите, что:

- б) монотонную булеву функцию можно записать в виде формулы, которая использует только связки \vee и \wedge .

DL 2.7. Две формулы, содержащие только переменные и связки \vee , \wedge и \neg , эквивалентны. Докажите, что они останутся эквивалентными, если всюду \vee заменить на \wedge и наоборот.