NB: АВЛ — Адельсон-Вельский и Ландис

[Sleator, Tarjan]

Splay-дерево

Определение операции Splay(x), которая переподвешивает вершину x в корень

Аналог: MTF (move to front)

Лемма 1: Стоимость Splay(x) = O(высоты).

Лемма 2: $\exists\ \Phi$ — некоторая функция потенциала, определённая на деревьях:

1) $\Phi(T) = O(n \log n)$, n — # эл-ов
2) Учётная стоимость Splay(x) относительно Φ = $O(\log n)$

Учётные стоимости

$\exists\ c_1, c_2, \dots, c_m$ — реальные стоимости операций

$\equiv \tilde{c}_i = c_i + \Phi_i - \Phi_{i-1}$,

где Φ_i — значение потенциала в момент i

Если мы покажем, что $\tilde{c}_i \le K$ $\Rightarrow$

$= \log n$

$\Rightarrow \sum \tilde{c}_i = \sum c_i + \Delta\Phi_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum c_i \le K \cdot m - \Delta\Phi$ $= \Phi_m - \Phi_0$

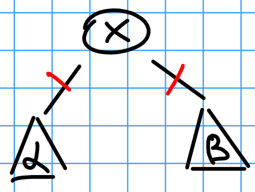
Для Splay(x): $\sum c_i = \sum \tilde{c}_i - \Delta\Phi =$

$= \underset{(Л.2.2)}{m \cdot O(\log n)} + \underset{(Л.2.1)}{O(n \log n)} \Rightarrow$

Следствие Л.2

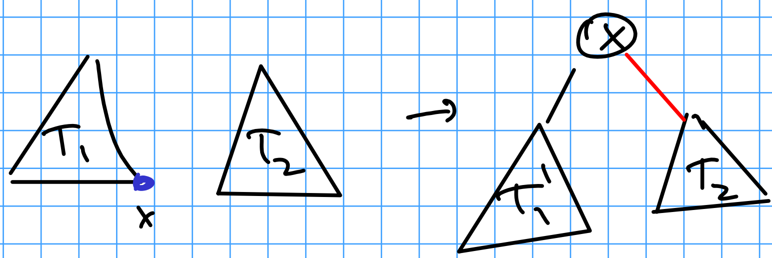
$\Rightarrow$ при $m = \Omega(n)$ Splay(x) имеет стоимость $O(\log n)$

```
SplayFind(x)
    x = Find(x)      // Find для дерева поиска
    Splay(x)

SplayInsert(x)
    x = Insert(x)
    Splay(x)

Split(x):
    x = Find(x)
    Splay(x)
    return (x.left, x, x.right)
```



$\alpha \le x \le \beta$

```
Merge(T1, T2):   // T1 ≤ T2
    x = FindMax(T1)
    Splay(x)
    x.right = T2
```

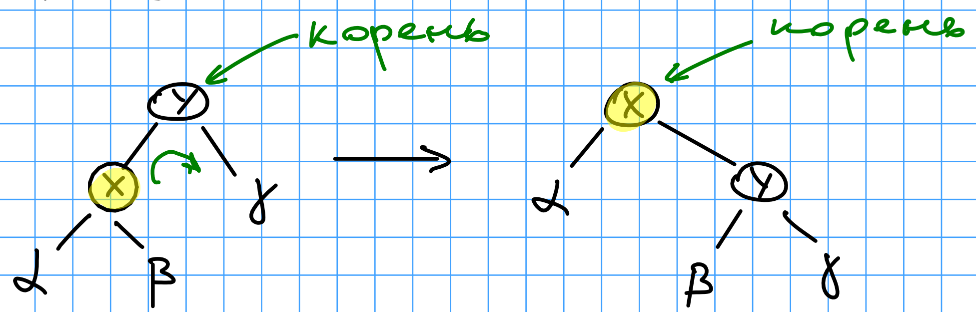



```
SplayRemove(x):
    (T1, x, T2) = Split(x)
    Merge(T1, T2)
```

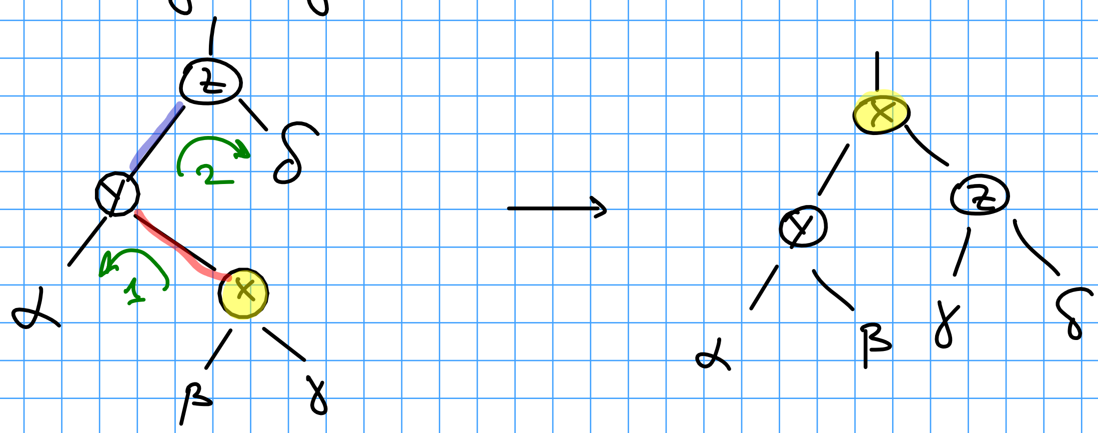
Утв: Все операции работают за O(высоты) + стоимость Splay(x) $\underset{№1}{\Rightarrow}$ работают за O(высоты)

Операция Splay(x):

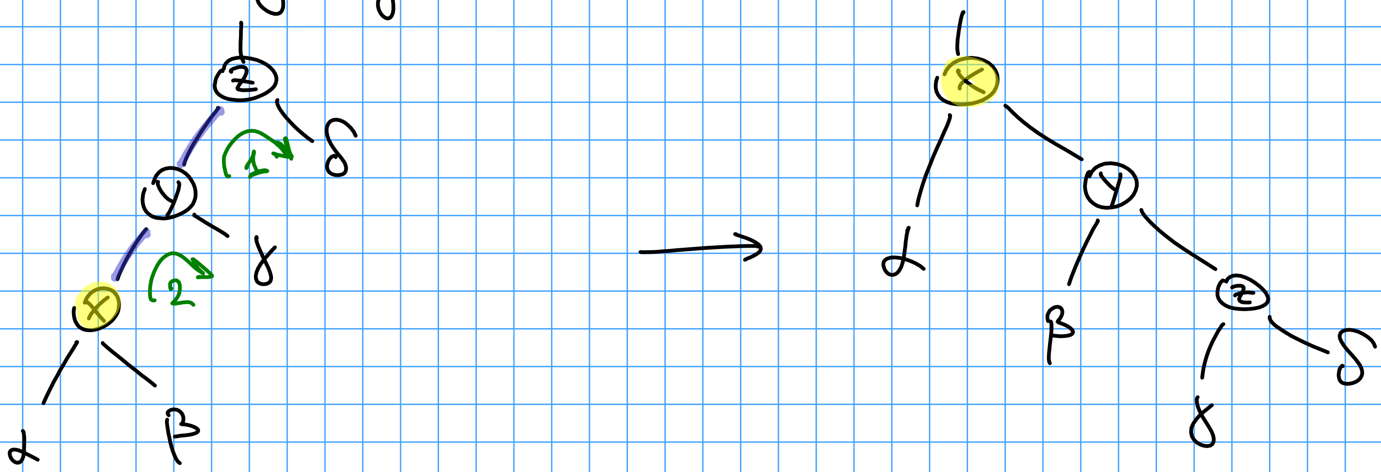
a) zig



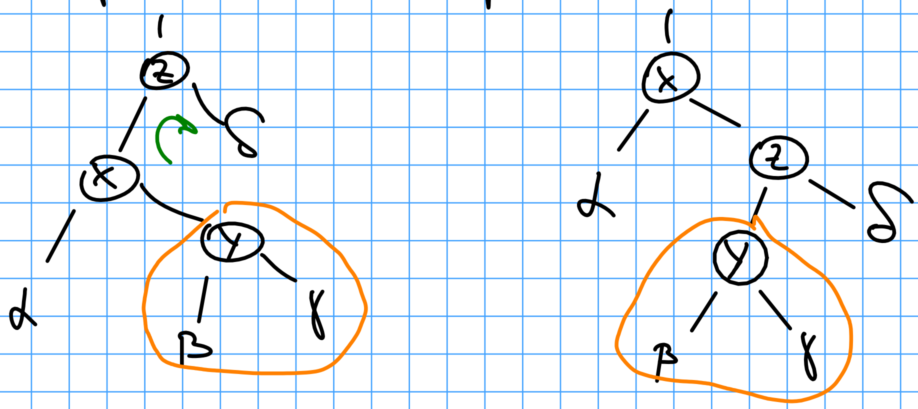
б) zig zag



в) zig zig



Замечание: если сделать повороты в обратном порядке, то получим



это плохо!

Следствие: лемма 1 доказана.

Доказательство л. 2.

Пусть $w(x)$ — # вершин в поддереве с корнем x

$$\Phi(x) = \lfloor \log_2 w(x) \rfloor = O(\log n)$$

$$\Phi(T) = \sum_{x \in T} \Phi(x) \Rightarrow \Phi(T) = O(n \log n)$$

(доказан пункт 1 л. 2)

Утв. а) стоимость zig шага $\le 3(\Phi'(x) - \Phi(x)) + 1$

только в zig

$\Phi(x)$ – до $Splay(x)$, $\Phi'(x)$ – после

б) Стоимость zigzag и zigzig $\le 3(\Phi'(x) - \Phi(x))$

Следствие:

Стоимость $Splay(x) \le 3(\Phi'(x) - \Phi(x)) + 1 = O(\log n)$

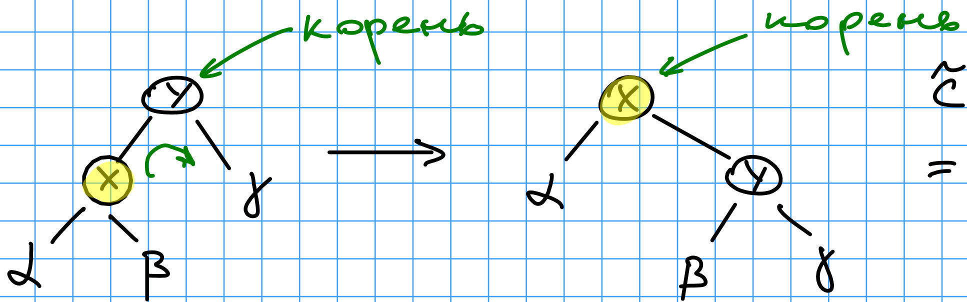
корень

т.к. $\Phi(x) = O(\log n) \Rightarrow Splay(x)$ требует $O(\log n)$

(пункт 2 л. 2)

Док-во:

а) zig шаг



$$\tilde{c} = c + \Delta\Phi =$$

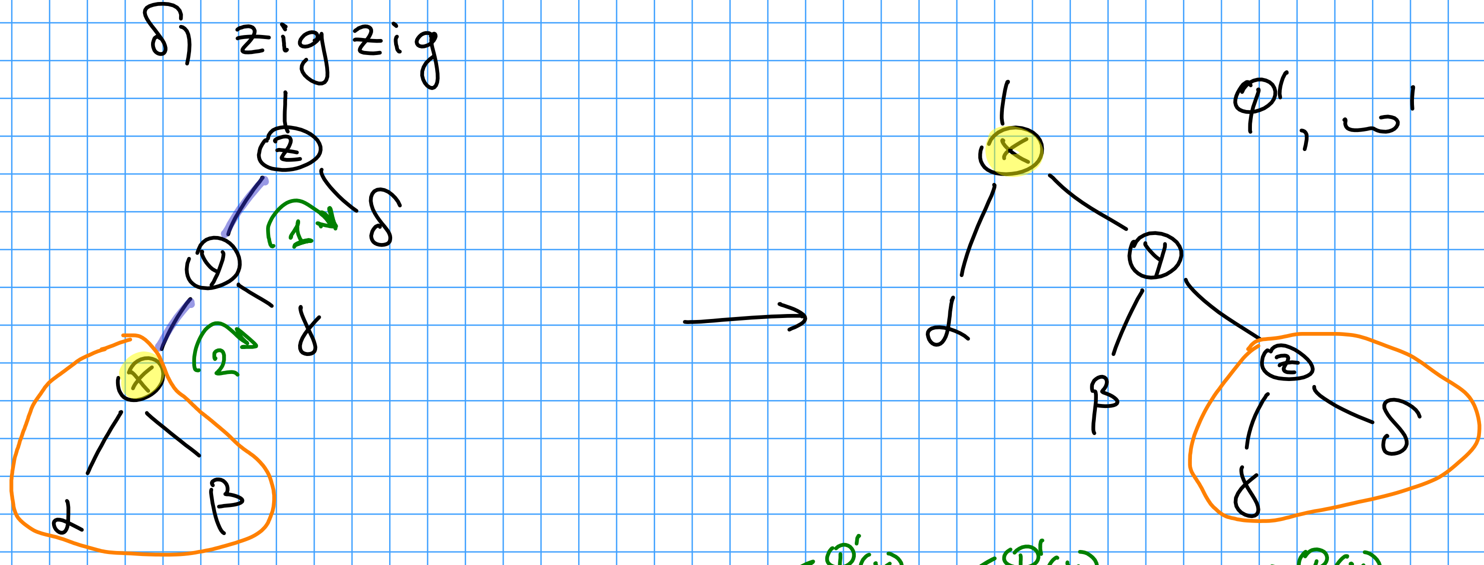
$$= 1 + \cancel{\Phi'(x)} + \underbrace{\Phi'(y)}_{\le \Phi'(x)} -$$

$$\Phi(x) - \underbrace{\cancel{\Phi(y)}}_{= \Phi'(x)} \le$$

$$\le 1 + \underbrace{\Phi'(x) - \Phi(x)}_{\ge 0} \le$$

$$\le 1 + 3(\Phi'(x) - \Phi(x))$$

б) zig zig



$$\tilde{C} = c + \Delta\varphi(T) = 1 + \cancel{\varphi'(x)}_{\le\varphi'(x)} + \varphi'(y)_{\le\varphi'(x)} + \varphi'(z)_{\ge\varphi(x)} - \varphi(x) - \varphi(y) - \cancel{\varphi(z)}_{=\varphi'(x)} \le$$

$$\le 1 + 2\underbrace{(\varphi'(x) - \varphi(x))}_{\Delta} \le 3(\varphi'(x) - \varphi(x))$$

$\Delta \ge 1$

Утв: $\Delta \ge 1$

От обратного: $\Delta = 0$

$$\begin{cases} \varphi'(x) = \varphi'(y) = \varphi'(z) = \varphi(z) \\ \varphi(x) = \varphi(y) \\ \varphi'(x) = \varphi(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi'(x) = \varphi(x) = \\ \varphi'(y) = \varphi(y) = \\ \varphi'(z) = \varphi(z) \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \lfloor \log_2 \omega(x) \rfloor$$

Пусть ω, ω' - это весовые ф-ции до и после Splay(x)

$\exists\, k: \quad 2^{k+1} > \omega'(x) \ge 2^k$, т.е. $\varphi'(x) = k$

$$2^{k+1} > \omega'(x) = 3 + \omega'(\alpha) + \omega'(\beta) + \omega'(\gamma) + \omega'(\delta) =$$

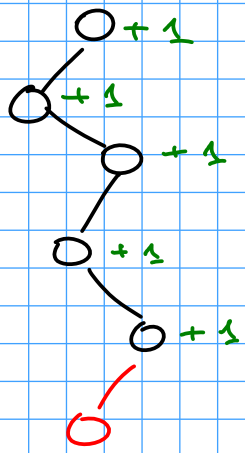
$$= \underbrace{(\omega(\alpha) + \omega(\beta) + 1)}_{\omega(x)} + \underbrace{(\omega(\gamma) + \omega(\delta) + 1)}_{\omega'(z)} + 1 \ge$$

$$\ge 2^k + 2^k + 1 > 2^{k+1}$$

противоречие $\square$

Замечание 1:

Splay Insert изменяет $\Phi(T)$ на $O(\log n)$



$+1$ соотв. $\begin{cases} w(x) = 2^{k+1} - 1 \\ w'(x) = 2^{k+1} \end{cases}$

$\Rightarrow$ не более $O(\log n)$ переходов на пути от места к корню.

$$\Delta \Phi \le (\#\ \text{степеней 2-ки} \le n) = \lfloor \log_2 n \rfloor$$

Замечание 2:

Функция Splay Remove изменяет потенциал не более чем на $O(\log n)$

$$\Delta \Phi = \Delta \Phi_{split} + \Delta \Phi_{merge}$$

$\Delta \Phi_{split} = -O(\log n)$ ← удаляем корень

$\Delta \Phi_{merge} = O(\log n)$ ↖ увеличиваем потенциал корня

$\Rightarrow \Delta \Phi = O(\log n)$