Занятие 1

1. Пусть
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n.$$
есть производящая функция для числовой последовательности $\{a_n\}$. Выразить через $f(z)$ производящие функции для последовательностей
$$b_n = a_n + a_{n+1}, \qquad c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i, \qquad d_n = \alpha^n \cdot a_n, \qquad e_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k+1; \\ a_n, & \text{если } n = 2k. \end{cases}$$

2. Докажите, что если каждый из степенных рядов $A(s)$ и $B(s)$ отличен от нуля, то и их произведение $A(s)B(s)$ отлично от нуля

3. Известно, что экспоненциальные производящие функции $F(z)$ и $G(z)$ для числовых последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ соответственно связаны соотношением $G(z) = F(z)/(1-z)$. Выразите b_n через a_n.

4. Рассмотрим следующие обыкновенные производящие фукнции:
$$g(z) = 1 - z - 6z^2, \qquad h(z) = 1 + 3z.$$
Получить явный вид коэффициентов f_n производящей функции $f(z)$, связанной с $g(z)$ и $h(z)$ равенством
$$f(z) \cdot g(z) = h(z).$$

5. Выразить через обыкновенную производящую функцию $g(z) = 1 - z$ производящие функции для числовых последовательностей
$$1 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ 3 \cdot 4\ \ldots;$$
$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots.$$

6. Используя определение произведения обыкновенных производящих функций, вычислить сумму
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} 4^{-k}.$$

7. При помощи производящих функций доказать следующие соотношения
   (a) $\sum\limits_{s=0}^{k} \binom{n}{s}\binom{m}{k-s} = \binom{n+m}{k}$
   (b) $\sum\limits_{s=0}^{k} \binom{n+s}{n}\binom{m+k-s}{m} = \binom{n+m+k+1}{k}$

8. Показать, что коэффициенты c_n у получающейся в результате перемножения двух функций
$$f(z) = \frac{a_1}{1^z} + \frac{a_2}{2^z} + \frac{a_3}{3^z} + \ldots \qquad \text{и} \qquad g(z) = \frac{b_1}{1^z} + \frac{b_2}{2^z} + \frac{b_3}{3^z} + \ldots$$
функции $h(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{c_n}{n^z}$ рассчитываются по формуле $c_n = \sum\limits_{d \backslash n} a_d b_{n/d}$.

9. Пусть δ_n есть количество делителей d числа n. Обозначим через $\delta(z)$ функцию Дирихле, отвечающую этой числовой последовательности $(\delta_1, \delta_2, \ldots)$. Выразить $\delta(z)$ через ζ-функцию Римана.

10. Пусть коэффициенты μ_n функции Мебиуса $\mu(z)$ заданы явной формулой $\mu_n = 0$, если $n = p^2 q$ для каких-то $p \neq 1, q$, $\mu_n = (-1)^s$ иначе, где s — количество различных простых делителей n. Доказать равенство $\zeta(z) \cdot \mu(z) = I(z)$, то есть доказать, что
$$\sum_{d \backslash n} \mu_d = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{если } n > 1. \end{cases}$$