

Практика по алгоритмам у бакалавров

Сергей Копелиович, Всеволод Опарин

Группа Опарина, Осень, 2014

1 Практика 1. Суммы, циклы

1.1 Теория

Арифметическая прогрессия

- $\sum_{n=a}^b n = \frac{(b+a)(b-a+1)}{2}$
- $\sum_{n=1}^a n = \frac{a(a+1)}{2}$

Геометрическая прогрессия

- $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$
- При $-1 < q < 1$: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}$
- Если $q = \frac{1}{1+\varepsilon}$: $1 - q = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \approx \varepsilon \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (1 + \varepsilon)^{-k} \approx \frac{1}{\varepsilon}$

Сумма гармонического ряда

- $1 + \lfloor \log_2 n \rfloor \geq \underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_1 + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_1 + \underbrace{\frac{1}{8} + \dots}_{1 \dots} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \geq \frac{1}{1} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{1/2} + \dots \geq 1 + \frac{1}{2} \lfloor \log_2 n \rfloor \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \Theta(\log n)$

Про интегралы

- Формула Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$
- Пример: $\ln'(n) = \frac{1}{n} \Rightarrow \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n - \ln 1 = \ln n$
- $\int_a^b \left[\min_{y \in [a..b]} f(y) \right] dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \left[\max_{y \in [a..b]} f(y) \right] dx$
- Для монотонно убывающей $f(x)$ имеем $f(a) \geq \int_a^{a+1} f(x) dx \geq f(a+1)$.
- Для монотонно возрастающей $f(x)$ имеем $f(a) \leq \int_a^{a+1} f(x) dx \leq f(a+1)$.
- Пусть $X(n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$, значит, $X(n) - \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \geq \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n \geq \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} = X(n) - 1 \Rightarrow \ln n + \frac{1}{n} \leq X(n) \leq \ln n + 1 \Rightarrow X(n) = \ln n + \mathcal{O}(1)$

1.2 Класс

Задачи про суммы

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{2^k}$
2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{1.01^k}$
3. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}}$
4. $\prod_{k=2}^n (1 - k^{-2})$
5. $\prod_{k=1}^n (2 \cdot 4^k)$

Задачи про циклы for. Во всех задачах нужно ответить на вопрос “за сколько работает”:

1. Найти такие a, b, c : $abc = N$, $a + b + c = \min$. Решение:

```
1. for (a = 1; a <= N; a++)
2.     for (b = 1; a * b <= N; b++)
3.         c = N / a / b, ... ;
```

2. Поиск делителей без деления

```
1. b = N;
2. for (a = 1; a * a <= N; a++) {
3.     while (a * b > N)
4.         b--;
5.     if (a * b == N)
6.         printf("%d %d\n", a, b);
7. }
```

3. Еще одно решение задачи (1)

```
1. for (a = 1; a * a * a <= N; a++)
2.     for (b = 1; b * b <= N; b++)
3.         c = N / a / b, ... ;
```

Получить $\mathcal{O}(N^{5/6})$

4. (*) И еще одно решение задачи (1)

```
1. for (a = 1; a * a * a <= N; a++)
2.     for (b = a; a * b * b <= N; b++)
3.         c = N / a / b, ... ;
```

Получить $\mathcal{O}(N^{2/3})$

1.3 Домашнее задание

Дедлайн: 15 сентября, 23.59

Задачи на цикл `for`. Оцените время работы.

1. Про строки

```
1. for (a = 1; a < n; a++)
2.     for (b = 0; b < n; b += a)
3.         ;
```

2. Partition

```
1. a = 1, b = n;
2. while (a < b) {
3.     while (x[a] < M && a <= b) a++;
4.     while (x[b] > M && a <= b) b--;
5.     if (a <= b) swap(x[a++], x[b--]);
6. }
```

Дополнительный вопрос: что делает этот код?

3. Логарифмы

```
1. while (a >= 2)
2.     a = sqrt(a);
```

Дополнительный вопрос: а если бы вместо 2 было бы 1?

4. Решето Эратосфена

```
1. for (p = 2; p < n; p++)
2.     if (min_divisor[p] == 0) // is prime
3.         for (x = p + p; x < n; x += p)
4.             if (min_divisor[x] == 0)
5.                 min_divisor[x] = p;
```

(*) Доказать $\mathcal{O}(N \log \log N)$ (пользуемся не доказанным фактом: $p_n \approx n \ln n$)

5. Перестановки и циклы

```
1. for (i = 0; i < n; i++)
2.     if (used[i] == 0)
3.         for (j = i; used[j] == 0; j = (j*17+2) % n)
4.             used[j] = 1;
```

Суммы

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$

3. Докажите, что $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{3/2}} = \mathcal{O}(1)$

2 Практика 2. Элементарные структуры данных

2.1 Класс

1. Дана последовательность чисел a_1, a_2, \dots, a_n и число S . Все числа положительные целые. Требуется за линейное время найти подотрезок последовательности такой, что сумма его элементов $\sum_{i=l}^r a_i = S$. Время – $O(n)$.
2. Дана последовательность чисел a_1, a_2, \dots, a_n . Все числа целые. Требуется за линейное время найти подотрезок последовательности такой, что сумма его элементов $\sum_{i=l}^r a_i$ максимальна. Время – $O(n)$.
3. Дана последовательность чисел: $x_1 = a$, $x_{i+1} = f(x_i)$, найти с $O(1)$ дополнительной памяти длину периода T и предпериода L за время $O(L + T)$.
4. Частичные суммы:
 - (a) Много раз сделать += на отрезке, в конце один раз вывести массив.
 - (b) Сперва много раз += на отрезке, затем много раз “сумма на отрезке”.
 - (c) В каждой целой точке x числовой прямой есть $f[x]$, изначально равная нулю. Те же запросы, что и в предыдущем пункте. Координаты запросов целые от 0 до 10^{18} .

2.2 Домашнее задание

Дедлайн: 22 сентября, 23.59

1. Задачи на стек.
 - (a) В массиве найти для каждого элемента ближайший меньший среди соседей слева и справа за $O(n)$.
 - (b) В последовательности a_1, a_2, \dots, a_n найти подотрезок, на котором максимизируется значение $(r - l + 1) \cdot \min_{i \in [l, r]} a_i$, за $O(n)$.
 - (c) Дана матрица из нулей и единиц. Найти наибольший по площади подпрямоугольник, состоящий только из нулей за $O(n^2)$.
2. Дан массив из $2n$ чисел. Найти минимальное **И** максимальное за $3n - 2$ сравнения.
3. Для этих задач приведите код на C++. Время работы алгоритма должно быть линейно. Множество и мультимножество можно хранить в виде отсортированного массива. Даны два множества A и B в отсортированном виде, за $O(|A| + |B|)$ построить в таком же виде их
 - (a) пересечение. Пример: $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 4\} = \{2\}$.

(b) разность. Пример: $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 4\} = \{1, 3\}$.

(c) объединение. Пример: $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

P.S. Если вы пишете в \LaTeX , попробуйте заодно пакет `\usepackage{minted}`. В `dropbox` Сережи Копелиовича есть пример. За подробной справкой можно обращаться к нему и Диме Лапшину.

3 Практика 3. Сортировки

3.1 Класс

1. Даны два массива a и b длины n , сгенерировать все попарные суммы $a_i + b_j$ в отсортированном порядке.
 - (a) За $\mathcal{O}(n^2 \log n)$.
 - (b) За $\mathcal{O}(n^3)$ с использованием $\mathcal{O}(n)$ дополнительной памяти.
 - (c) За $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ с использованием $\mathcal{O}(n)$ дополнительной памяти.
2. В свободное время Анка-пулеметчица любит сортировать патроны по серийным номерам. Вот и сейчас она только разложила патроны на столе в строго отсортированном порядке. Но тут Иван Васильевич распахнул дверь с такой силой, что все патроны на столе подпрыгнули и немного перемешались. Оставив ценные указания, Иван Васильевич отправился восвояси. Как оказалось, патроны перемешались не сильно. Каждый патрон отклонился от своей позиции не более чем на k . Всего патронов n . Помогите Анке отсортировать патроны.
 - (a) Отсортируйте патроны за $\mathcal{O}(nk)$.
 - (b) Отсортируйте патроны за $\mathcal{O}(n + I)$, где I — число инверсий.
 - (c) Докажите нижнюю оценку на время сортировки $\Omega(n \log k)$.
 - (d) Отсортируйте патроны за $\mathcal{O}(n \log k)$.
3. Дан массив из $n+1$ целого числа от 1 до n . Массив доступен только на чтение, есть $\mathcal{O}(1)$ дополнительной памяти. Найти за $\mathcal{O}(n)$ любое число, которое встречается хотя бы два раза.
4. Дано n точек на плоскости. Соединить их
 - (a) $(n-1)$ -звенной ломаной без самопересечений (не замкнутой);
 - (b) n -звенной ломаной без самопересечений (замкнутой)за $\mathcal{O}(n \log n)$.
5. Дан набор из N отрезков $[a_i, b_i]$. Числа a_i, b_i — вещественные.
 - (a) Найти такое вещественное x , что $|\{i : x \in [a_i, b_i]\}|$ максимально.
 - (b) Длину объединения отрезков.
 - (c) Для каждого k посчитать, сколько точек на прямой покрыто ровно k отрезками.
6. Даны два массива из положительных чисел a и b . $|a| = |b|$. Выбрать массив p : k различных чисел от 1 до n так, чтобы:

- (a) $\sum_{i=1}^n a_{p_i} b_{p_i} \rightarrow \max.$
 (b) $\frac{\sum_{i=1}^n a_{p_i}}{\sum_{i=1}^n b_{p_i}} \rightarrow \max.$
 (c) $(\sum_{i=1}^n a_{p_i})(\sum_{i=1}^n b_{p_i}) \rightarrow \max.$

3.2 Домашнее задание

Дедлайн: 29 сентября, 23.59

- Даны два массива a и b одинаковой длины.
 Нужно найти такую перестановку p , что $\sum_{i=1}^n a_{p_i} b_i \rightarrow \max.$ Решение обосновать.
- Рассмотрим бинарную кучу, у которой дерево необязательно сбалансированно.
 Пусть $d(v)$ – расстояние вниз от вершины v до ближайшего листа, а $size(v)$ – число вершин в поддереве с корнем в вершине v .
 Куча называется левачкой, если $\forall v: d(l[v]) \geq d(r[v]).$
 - докажите, что $size(v) \geq 2^{d(v)}$
 - напишите быстрый Merge для данной кучи, дайте оценку времени работы
- Дано $2 \cdot n - 1$ коробок с черными и белыми шарами. В i -ой коробке находится w_i белых и b_i черных шаров. Всего в коробках находится W белых и B черных шаров. Требуется выбрать n коробок, чтобы суммарное число белых шаров в них было не менее $\frac{W}{2}$, а черных не менее $\frac{B}{2}$. Решить за $\mathcal{O}(n \log n)$.
- На прямой расположено n точек p_1, p_2, \dots, p_n в порядке возрастания. Каждая точка имеет вес $w_i \geq 0$. Требуется найти такую точку q , что $\sum_i w_i \cdot |p_i - q|$ имела бы минимальное значение. Время работы: $\mathcal{O}(n)$.

Примечание. Точки на вход подаются в порядке возрастания.

4 Практика 4. Куча и медиана

4.1 Класс

1. Пусть есть структура данных, реализующая интерфейс `PriorityQueue (Add, DeleteMin)`. Как расширить эту структуру данных операциями `Build, Delete, DecreaseKey, Merge`?
2. Робот Иван Семеныч пробует пирожки. Содержимое пирожков делится на три типа. Всего пирожков n . Каждый пирожок можно попробовать не более одного раза. Пирожки можно менять местами. Память у робота маленькая, $O(\log n)$ бит. Помогите Ивану Семенычу отсортировать пирожки по типу: сначала первый, потом второй, потом третий. Сортировка должна работать за линейное время.
3. Найти отрезок массива, на котором $(\min_{i \in [l, r]} a_i) \cdot \sum_{i \in [l, r]} a_i$ максимально. Время $O(n)$.
 - (a) Все числа положительны.
 - (b) Числа целые, 32-битные. Решение с использованием минимума на отрезке за $O(1)$.
 - (c) Числа целые, 32-битные. Простое решение.
4. Дана обычная бинарная куча, за сколько можно узнать k -й минимум?
 - (a) $O(k \log n)$
 - (b) $O(k^2)$
 - (c) $O(k \log k)$
5. Оцените число сравнений, которое сделают
 - (a) `MergeSort`, если в массиве ровно $n = 2^k$ элементов.
 - (b) `HeapSort`, если в массиве ровно $n = 2^k - 1$ элементов.
 - (c) `QuickSort`, если в массиве все элементы различны, а выбирается случайный.

Во всех пунктах нужны точные константы.

4.2 Домашнее задание

Дедлайн: 6 октября, 23.59

Если не успели рассказать. k -ая порядковая статистика в массиве a является k -ым по порядку элементом. Т.е. если массив a отсортировать, то это будет a_k .

Во всех задачах ниже можно считать, что существует процедура поиска k -ой статистики за $O(n)$, где n – длина массива.

1. Медианой называется $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ -я порядковая статистика. Придумайте структуру данных на основе `heap`, которая умеет делать `Insert(x)`, `DeleteMedian()`, все операции за $\mathcal{O}(\log n)$.
2. Дан массив `A[1..n]` из n различных чисел. Массив не обязательно отсортирован. Требуется найти k ближайших к медиане элементов за линейное время. Решить для двух метрик.

(a) По позиции в отсортированном массиве.

$$d(x, \text{median}) = |\text{pos}(x) - \text{pos}(\text{median})|,$$

где $\text{pos}(x)$ — позиция элемента x в отсортированном массиве.

(b) По значению.

$$d(x, \text{median}) = |x - \text{median}|.$$

3. Дано два массива a_1, a_2, \dots, a_n и p_1, p_2, \dots, p_m . Второй массив отсортирован. Нужно за $\mathcal{O}(n \log m)$ для каждого i найти p_i -ую порядковую статистику в массиве a .

5 Практика 5. Вероятности и бин. поиск

5.1 Класс

1. Пусть X – число выпадений орла после n бросаний фальшивой монетки. Докажите, что $\mathbf{D}[X] = npq$.

5.2 Домашнее задание

Дедлайн: 13 октября, 23.59

1. Бинарный поиск на массиве

- (a) Выразить `upper_bound` для целых чисел через `lower_bound`.
- (b) Докажите, что нельзя сделать и `lower_bound`, и `upper_bound` одновременно, используя в худшем случае меньше чем $2 \log_2 n + \mathcal{O}(1)$ сравнений?
- (c) Сделать предподсчет за $\mathcal{O}(n \log n)$, чтобы за $\mathcal{O}(\log n)$ отвечать на запрос “сколько раз число x встречается на отрезке $[l..r]$ ”?

2. Под \mathbb{F}_2 будем подразумевать поле из двух элементов: 0 и 1. Определим для них операции сложения и умножения как обычные по модулю 2. Например, $1 + 1 = 0$. \mathbb{F}_2^n – это вектор размерности n над полем \mathbb{F}_2 .

Определим $U(S)$ как равномерное распределение над множеством S . Т.е. каждый элемент S может выпасть с вероятностью $\frac{1}{|S|}$.

- (a) Докажите для любого ненулевого $a \in \mathbb{F}_2^n$ что

$$\Pr_{x \leftarrow U(\mathbb{F}_2^n)} [a \cdot x = 0] = \frac{1}{2}$$

Примечание. $a \cdot x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i$ по модулю 2.

- (b) Даны три матрицы A , B и C размерности $n \times n$ над полем \mathbb{F}_2 . Постройте алгоритм, который работает $\mathcal{O}(n^2)$ и
 - возвращает 1, если $A \cdot B = C$ с вероятностью 1;
 - возвращает 0, если $A \cdot B \neq C$ с вероятностью не меньше $\frac{1}{2}$.
3. Есть три контейнера. В одном из них лежит золотой шар. Оба других пусты. Разрешается открыть только один контейнер. Вы сели на первый попавшийся, и в этот момент открылся второй. Он оказался пуст. Есть ли теперь разница, какой контейнер открывать? Ответ обосновать.

6 Практика 6. Динамика

6.1 Домашнее задание

Дедлайн: 20 октября, 23.59

1. На билете есть $2n$ значный номер. Билет считается счастливым, если сумма первых n цифр совпадает с суммой последних n цифр. По заданому числу n требуется найти число счастливых $2n$ значных билетов за $O(n^2)$. Считать, что стандартные арифметические операции над числами выполняются за $O(1)$.
2. Судно атакуют пираты. Для каждого пирата известны его азимут a_i и время t_i , через которое пират приплывет и совершит непотребство. Однако, у судна есть лазерная пушка, которой оно защищается. У пушки есть начальный азимут a и угловая скорость вращения ω . Пушка уничтожает все объекты, на которые она сейчас направлена. Помогите судну определить порядок уничтожения пиратов за $O(n^2)$, чтобы не допустить непотребства.
3. Дан текст из слов длины l_1, l_2, \dots, l_n . Порядок слов менять нельзя. Хотим сделать красивый абзац. В красивом абзаце длина каждой строки ровно L (остаток заполняется пробелами). Между каждой парой слов стоит хотя бы один пробел. Обозначим число пробелов в строке i через gap_i . Нужно сделать абзац с минимальным значением $\sum_i gap_i^3$, где сумма пробегается по всем строкам построенного абзаца. Решить за $O(n \cdot L)$.
4. Есть три контейнера. В одном из них лежит золотой шар. Оба других пусты. Разрешается открыть только один контейнер. Вы сели на первый попавшийся. Известно, что в этот момент откроется один из двух других. Если в одном из них есть золотой шар, то второй открывается с вероятностью p . Открылся пустой. Какова вероятность, что в контейнере, на котором вы сидите, есть золотой шар? Решить в общем случае, при $p = 1$ и $p = \frac{1}{2}$.

7 Практика 7. Динамика

7.1 Домашнее задание

Дедлайн: 27 октября, 23.59

1. Скобочная последовательность почти правильная, если является префиксом некоторой правильной скобочной последовательности. Найти число почти правильных последовательностей длины n . Решить через динамику за квадрат и написать формулу в явном виде.
2. k -ичная система исчисления – это система, в которой присутствует k цифр. Найдите количество n -значных чисел в k -ичной системе, не содержащих двух нулей подряд за $O(n)$. Можно считать, что ответ считается по модулю маленького простого числа, поэтому все стандартные арифметические операции выполняются за $O(1)$.
3. Шаблон для строки состоит из символов латинского алфавита, ? и *. Мы говорим, что строка s подходит под шаблон p , если существует каждый ? в шаблоне можно заменить на букву, а * на возможно пустую строку из латинских букв так, что результат будет равен s . Для строки s и шаблона p определите, подходит ли строка под шаблон за $O(|s| \cdot |p|)$.
4. Взвешанный бинарный поиск элемента x . Бинарный поиск взвешанный, если стоимость обращения к i -му элементу массива равна $c_i > 0$. Мы не знаем сам массив, не знаем x , который будем искать, знаем только массив стоимостей c . Нужно за $O(n^3)$ найти стоимость поиска элемента в худшем случае. Внутри бинарного поиска не обязательно сравнивать с серединой, мы сами выбираем элемент, с которым сравнивать.
5. Дана строка s из цифр 0 и 1. Строка свободна от s если не содержит s в качестве подстроки. Требуется найти число строк, свободных от s , длины n из цифр 0 и 1. Можно считать, что ответ считается по модулю маленького простого числа, поэтому все стандартные арифметические операции выполняются за $O(1)$. Время:
 - (a) $O(|s|^3 + |s| \cdot n)$;
 - (b) $O(|s| \cdot n)$.

8 Практика 8. Динамика

8.1 Практика

1. Операции с битами
 - (a) Дано w -битное число, за $\mathcal{O}(1)$, проверить, является ли число степенью двойки.
 - (b) Дано w -битное число, за $\mathcal{O}(1)$, проверить, правда ли, что в битовой записи никакие две единицы не идут подряд.
 - (c) Дано w -битное число, за $\mathcal{O}(\log w)$ найти старший единичный бит.
 - (d) Дано w -битное число, за $\mathcal{O}(\log w)$ посчитать количество единичных бит.
 - (e) Дано w -битное число, найти младший единичный бит быстрее чем $\mathcal{O}(w)$.
2. Задачи про паросочетания в произвольном графе
 - (a) Посчитать количество паросочетаний
 - (b) Найти максимальное по весу паросочетание

8.2 Домашнее задание

Дедлайн: 10 ноября, 23.59

1. Для каждого множества вершин в графе посчитать количество независимых подмножеств. а) $\mathcal{O}(3^n)$; б) $\mathcal{O}(2^n \cdot n)$; в) $\mathcal{O}(2^n)$.
2. Дан двудольный граф, в первой доли $m \leq 15$ вершин, во второй $n \leq 1000$ вершин. Предложите алгоритм, который считает количество паросочетаний, покрывающих все m вершин первой доли.
3. Дан неориентированный граф. Посчитать за $\mathcal{O}^*(2^n)$ количество способов все вершины графа разбить на циклы. Каждая вершина должна лежать ровно в одном цикле. Разбиения на циклы различны, если различны множества использованных ребер. (\mathcal{O}^* – это как \mathcal{O} , только вместо константы может быть полином).
4. Васе дали кость на d граней. На гранях написаны числа от 1 до d . Каждая грань выпадает равновероятно. Вася может кинуть кость не более n раз. Выигрыш Васи – результат последнего броска. Вася желает выиграть как можно больше. Найти мат. ожидание выигрыша, если Вася играет оптимально. Время $\mathcal{O}(n)$.