# Практика по алгоритмам у бакалавров

Сергей Копелиович, Всеволод Опарин

Группа Опарина, Осень, 2014

# 1 Практика 1. Суммы, циклы

## 1.1 Теория

**Арифметическая прогрессия**

- $\sum\limits_{n=a}^{b} n = \frac{(b+a)(b-a+1)}{2}$
- $\sum\limits_{n=1}^{a} n = \frac{a(a+1)}{2}$

**Геометрическая прогрессия**

- $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$
- При $-1 < q < 1$: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}$
- Если $q = \frac{1}{1+\varepsilon}$: $1 - q = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \approx \varepsilon \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty}(1+\varepsilon)^{-k} \approx \frac{1}{\varepsilon}$

**Сумма гармонического ряда**

- $1+\lfloor \log_2 n \rfloor \geq \frac{1}{1}+\overbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}^{1}+\overbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}^{1}+\overbrace{\frac{1}{8}+\ldots}^{1\ldots} \geq \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \geq \frac{1}{1}+\underbrace{\frac{1}{2}}_{1/2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{1/2}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{1/2}+\cdots \geq 1+\frac{1}{2}\lfloor \log_2 n \rfloor \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \Theta(\log n)$

**Про интегралы**

- Формула Ньютона-Лейбница: $\int\limits_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$
- Пример: $\ln'(n) = \frac{1}{n} \Rightarrow \int\limits_1^n \frac{1}{x}dx = \ln n - \ln 1 = \ln n$
- $\int\limits_a^b \left[\min\limits_{y\in[a..b]} f(y)\right]dx \le \int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b \left[\max\limits_{y\in[a..b]} f(y)\right]dx$
- Для монотонно убывающей $f(x)$ имеем $f(a) \ge \int\limits_a^{a+1} f(x)dx \ge f(a+1)$.
- Для монотонно возрастающей $f(x)$ имеем $f(a) \le \int\limits_a^{a+1} f(x)dx \le f(a+1)$.
- Пусть $X(n) = \sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{i}$, значит, $X(n) - \frac{1}{n} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \ge \int\limits_1^n \frac{1}{x}dx = \ln n \ge \sum\limits_{i=2}^n \frac{1}{i} = X(n) - 1 \Rightarrow$
  $\Rightarrow \ln n + \frac{1}{n} \le X(n) \le \ln n + 1 \Rightarrow X(n) = \ln n + \mathcal{O}(1)$

## 1.2 Класс

**Задачи про суммы**

1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{n}{2^k}$
2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{n}{1.01^k}$
3. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$
4. $\prod\limits_{k=2}^{n} (1 - k^{-2})$
5. $\prod\limits_{k=1}^{n} (2 \cdot 4^k)$

**Задачи про циклы for.** Во всех задачах нужно ответить на вопрос “за сколько работает”:

1. Найти такие $a$, $b$, $c$: $abc = N$, $a + b + c = \min$. Решение:
```
for (a = 1; a <= N; a++)
    for (b = 1; a * b <= N; b++)
        c = N / a / b, ... ;
```
2. Поиск делителей без деления
```
b = N;
for (a = 1; a * a <= N; a++) {
    while (a * b > N)
        b--;
    if (a * b == N)
        printf("%d %d\n", a, b);
}
```
3. Еще одно решение задачи (1)
```
for (a = 1; a * a * a <= N; a++)
    for (b = 1; b * b <= N; b++)
        c = N / a / b, ... ;
```
Получить $\mathcal{O}(N^{5/6})$
4. (*) И еще одно решение задачи (1)
```
for (a = 1; a * a * a <= N; a++)
    for (b = a; a * b * b <= N; b++)
        c = N / a / b, ... ;
```
Получить $\mathcal{O}(N^{2/3})$

## 1.3 Домашнее задание

**Дедлайн: 15 сентября, 23.59**

**Задачи на цикл for.** Оцените время работы.

1. Про строки
```
for (a = 1; a < n; a++)
    for (b = 0; b < n; b += a)
        ;
```

2. Partition

```
a = 1, b = n;
while (a < b) {
    while (x[a] < M && a <= b) a++;
    while (x[b] > M && a <= b) b--;
    if (a <= b) swap(x[a++], x[b--]);
}
```

Дополнительный вопрос: что делает этот код?

3. Логарифмы

```
while (a >= 2)
    a = sqrt(a);
```

Дополнительный вопрос: а если бы вместо 2 было бы 1?

4. Решето Эратосфена

```
for (p = 2; p < n; p++)
    if (min_divisor[p] == 0) // is prime
        for (x = p + p; x < n; x += p)
            if (min_divisor[x] == 0)
                min_divisor[x] = p;
```

(*) Доказать $\mathcal{O}(N \log \log N)$ (пользуемся не доказанным фактом: $p_n \approx n \ln n$)

5. Перестановки и циклы

```
for (i = 0; i < n; i++)
    if (used[i] == 0)
        for (j = i; used[j] == 0; j = (j*17+2) % n)
            used[j] = 1;
```

### Суммы

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$

3. Докажите, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{3/2}} = \mathcal{O}(1)$

# 2 Практика 2. Элементарные структуры данных

## 2.1 Класс

1. Дана послеодвательность чисел $a_1, a_2, \cdots, a_n$ и число $S$. Все числа положительные целые. Требуется за линейное время найти подотрезок последовательности такой, что сумма его элементов $\sum_{i=l}^{r} a_i = S$. Врямя – $O(n)$.

2. Дана послеодвательность чисел $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Все числа целые. Требуется за линейное время найти подотрезок последовательности такой, что сумма его элементов $\sum_{i=l}^{r} a_i$ максимальна. Врямя – $O(n)$.

3. Дана последовательность чисел: $x_1 = a,\ x_{i+1} = f(x_i)$, найти с $O(1)$ дополнительной памяти длину периода $T$ и предпериода $L$ за время $\mathcal{O}(L+T)$.

4. Частичные суммы:

   (a) Много раз сделать `+=` на отрезке, в конце один раз вывести массив.

   (b) Сперва много раз `+=` на отрезке, затем много раз “сумма на отрезке”.

   (c) В каждой целой точке $x$ числовой прямой есть $f[x]$, изначально равная нулю. Те же запросы, что и в предыдущем пункте. Координаты запросов целые от 0 до $10^{18}$.

## 2.2 Домашнее задание

**Дедлайн: 22 сентября, 23.59**

1. Задачи на стек.

   (a) В массиве найти для каждого элемента ближайший меньший среди соседей слева и справа за $O(n)$.

   (b) В последовательности $a_1, a_2, \cdots, a_n$ найти подотрезок, на котором максимизируется значение $(r-l+1) \cdot \min_{i \in [l,r]} a_i$, за $O(n)$.

   (c) Дана матрица из нулей и единиц. Найти наибольший по площади подпрямоугольник, состоящий только из нулей за $O(n^2)$.

2. Дан массив из $2n$ чисел. Найти минимальное **И** максимальное за $3n-2$ сравнения.

3. Для этих задач приведите код на C++. Время работы алгоритма должно быть линейно. Множество и мультимножество можно хранить в виде отсортированного массива. Даны два множества $A$ и $B$ в отсортированном виде, за $\mathcal{O}(|A|+|B|)$ построить в таком же виде их

   (a) пересечение. Пример: $\{1,2,3\} \cap \{2,4\} = \{2\}$.

(b) разность. Пример: $\{1,2,3\} \setminus \{2,4\} = \{1,3\}$.

(c) объединение. Пример: $\{1,2,3\} \cup \{2,4\} = \{1,2,3,4\}$.

P.S. Если вы пишете в LaTeX, попробуйте заодно пакет `\usepackage{minted}`. В `dropbox` Сережи Копелиовича есть пример. За подробной справкой можно обращаться к нему и Диме Лапшину.

# 3 Практика 3. Сортировки

## 3.1 Класс

1. Даны два массива $a$ и $b$ длины $n$, сгенерировать все попарные суммы $a_i + b_j$ в сортированном порядке.

   (a) За $\mathcal{O}(n^2 \log n)$.

   (b) За $\mathcal{O}(n^3)$ с использованием $\mathcal{O}(n)$ дополнительной памяти.

   (c) За $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ с использованием $\mathcal{O}(n)$ дополнительной памяти.

2. В свободное время Анка-пулеметчица любит сортировать патроны по серийным номера. Вот и сейчас она только разложила патроны на столе в строго отсортированном порядке. Но тут Иван Васильевич распахнул дверь с такой силой, что все патроны на столе подпрыгнули и немного перемешались. Оставив ценные указания, Иван Васильевич отправился восвояси. Как оказалось, патроны перемешались не сильно. Каждый патрон отклонился от своей позиции не более чем на $k$. Всего патронов $n$. Помогите Анке отсортировать патроны.

   (a) Отсортируйте патроны за $\mathcal{O}(nk)$.

   (b) Отсортируйте патроны за $\mathcal{O}(n + I)$, где $I$ — число инверсий.

   (c) Докажите нижнюю оценку на время сортировки $\Omega(n \log k)$.

   (d) Отсортируйте патроны за $\mathcal{O}(n \log k)$.

3. Дан массив из $n+1$ целого числа от 1 до $n$. Массив доступен только на чтение, есть $\mathcal{O}(1)$ дополнительной памяти. Найти за $\mathcal{O}(n)$ любое число, которое встречается хотя бы два раза.

4. Дано $n$ точек на плоскости. Соединить их

   (a) $(n-1)$–звенной ломаной без самопересечений (не замкнутой);

   (b) $n$–звенной ломаной без самопересечений (замкнутой)

   за $\mathcal{O}(n \log n)$.

5. Дан набор из $N$ отрезков $[a_i, b_i]$. Числа $a_i$, $b_i$ — вещественные.

   (a) Найти такое вещественное $x$, что $|\{i \colon x \in [a_i, b_i]\}|$ максимально.

   (b) Длину объединения отрезков.

   (c) Для каждого $k$ посчитать, сколько точек на прямой покрыто ровно $k$ отрезками.

6. Даны два массива из положительных чисел $a$ и $b$. $|a| = |b|$.
   Выбрать массив $p$: $k$ различных чисел от 1 до $n$ так, чтобы:

(a) $\sum_{i=1}^{n} a_{p_i} b_{p_i} \to \max$.

(b) $\frac{\sum_{i=1}^{n} a_{p_i}}{\sum_{i=1}^{n} b_{p_i}} \to \max$.

(c) $(\sum_{i=1}^{n} a_{p_i})(\sum_{i=1}^{n} b_{p_i}) \to \max$.

## 3.2 Домашнее задание

**Дедлайн: 29 сентября, 23.59**

1. Даны два массива $a$ и $b$ одинаковой длины.
   Нужно найти такую перестановку $p$, что $\sum_{i=1}^{n} a_{p_i} b_i \to \max$. Решение обосновать.

2. Рассмотрим бинарную кучу, у которой дерево необязательно сбалансированно. Пусть $d(v)$ – расстояние вниз от вершины $v$ до ближайшего листа, а $size(v)$ – число вершин в поддереве с корнем в вершине $v$.

   Куча называется левацкой, если $\forall v\colon d(l[v]) \geq d(r[v])$.

   (a) докажите, что $size(v) \geq 2^{d(v)}$

   (b) напишите быстрый `Merge` для данной кучи, дайте оценку времени работы

3. Дано $2 \cdot n - 1$ коробок с черными и белыми шарами. В $i$-ой коробке находится $w_i$ белых и $b_i$ черных шаров. Всего в коробках находится $W$ белых и $B$ черных шаров. Требуется выбрать $n$ коробок, чтобы суммарное число белых шаров в них было не менее $\frac{W}{2}$, а черных не менее $\frac{B}{2}$. Решить за $\mathcal{O}(n \log n)$.

4. На прямой расположено $n$ точек $p_1$, $p_2$, $\cdots$, $p_n$ в порядке возрастания. Каждая точка имеет вес $w_i \geq 0$. Требуется найти такую точку $q$, что $\sum_i w_i \cdot |p_i - q|$ имела бы минималь1ное значение. Время работы: $O(n)$.

   **Примечание.** Точки на вход подаются в порядке возрастания.

# 4 Практика 4. Куча и медиана

## 4.1 Класс

1. Пусть есть структура данных, реализующая интерфейс `PriorityQueue` (`Add`, `DeleteMin`). Как расширить эту структуру данных операциями `Build`, `Delete`, `DecreaseKey`, `Merge`?

2. Робот Иван Семеныч пробует пирожки. Содержимое пирожков делится на три типа. Всего пирожков $n$. Каждый пирожок можно попробовать не более одного раза. Пирожки можно менять местами. Память у робота маленькая, $O(\log n)$ бит. Помогите Ивану Семенычу отсортировать пирожки по типу: сначала первый, потом второй, потом третий. Сортировка должна работать за линейное время.

3. Найти отрезок массива, на котором $(\min_{i\in[l,r]} a_i) \cdot \sum_{i\in[l,r]} a_i$ максимально. Время $\mathcal{O}(n)$.

   (a) Все числа положительны.

   (b) Числа целые, 32-битные. Решение с использованием минимума на отрезке за $\mathcal{O}(1)$.

   (c) Числа целые, 32-битные. Простое решение.

4. Дана обычная бинарная куча, за сколько можно узнать $k$-й минимум?

   (a) $\mathcal{O}(k \log n)$

   (b) $\mathcal{O}(k^2)$

   (c) $\mathcal{O}(k \log k)$

5. Оцените число сравнений, которое сделают

   (a) `MergeSort`, если в массиве ровно $n = 2^k$ элементов.

   (b) `HeapSort`, если в массиве ровно $n = 2^k - 1$ элементов.

   (c) `QuickSort`, если в массиве все элементы различны, а выбирается случайный.

   Во всех пунктах нужны точные константы.

## 4.2 Домашнее задание

**Дедлайн: 6 октября, 23.59**

Если не успели рассказать. $k$-ая порядковая статистика в массиве $a$ является $k$-ым по порядку элементом. Т.е. если массив $a$ отсортировать, то это будет $a_k$.

Во всех задачах ниже можно считать, что существует процедура поиска $k$-ой статистики за $O(n)$, где $n$ – длина массива.

1. Медианой называется $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$-я порядковая статистика. Придумайте структуру данных на основе `heap`, которая умеет делать `Insert(x)`, `DeleteMedian()`, все операции за $\mathcal{O}(\log n)$.

2. Дан массив `A[1..n]` из $n$ различных чисел. Массив не обязательно отсортирован. Требуется найти $k$ ближайших к медиане элементов за линейное время. Решить для двух метрик.

   (a) По позиции в отсортированном массиве.

   $$d(x, \texttt{median}) = |\texttt{pos}(x) - \texttt{pos}(\texttt{median})|,$$

   где $\texttt{pos}(x)$ — позиция элемента $x$ в отсортированном массиве.

   (b) По значению.

   $$d(x, \texttt{median}) = |x - \texttt{median}|.$$

3. Дано два массива $a_1, a_2, \cdots, a_n$ и $p_1, p_2, \ldots p_m$. Второй массив отсортирован. Нужно за $\mathcal{O}(n \log m)$ для каждого $i$ найти $p_i$-ую порядковую статистику в массиве $a$.

# 5 Практика 5. Вероятности и бин. поиск

## 5.1 Класс

1. Пусть $X$ – число выпадений орла после $n$ бросаний фальшивой монетки. Докажите, что $\mathbf{D}[\ X\ ] = npq$.

## 5.2 Домашнее задание

**Дедлайн: 13 октября, 23.59**

1. Бинарный поиск на массиве

   (a) Выразить `upper_bound` для целых чисел через `lower_bound`.

   (b) Докажите, что нельзя сделать и `lower_bound`, и `upper_bound` одновременно, используя в худшем случае меньше чем $2\log_2 n + \mathcal{O}(1)$ сравнений?

   (c) Сделать предподсчет за $\mathcal{O}(n \log n)$, чтобы за $\mathcal{O}(\log n)$ отвечать на запрос "сколько раз число $x$ встречается на отрезке $[l..r]$"?

2. Под $\mathbb{F}_2$ будем подразумевать поле из двух элементов: 0 и 1. Определим для них операции сложения и умножения как обычные по модулю 2. Например, $1 + 1 = 0$. $\mathbb{F}_2^n$ – это вектор размерности $n$ над полем $\mathbb{F}_2$.

   Определим $U(S)$ как равномерное распределение над множеством $S$. Т.е. каждый элемент $S$ может выпасть с вероятностью $\frac{1}{|S|}$.

   (a) Докажите для любого ненулевого $a \in \mathbb{F}_2^n$ что

   $$\mathop{\mathbf{Pr}}_{x \leftarrow U(\mathbb{F}_2^n)}[\ a \cdot x = 0\ ] = \frac{1}{2}$$

   Примечание. $a \cdot x = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i$ по модулю 2.

   (b) Даны три матрицы $A$, $B$ и $C$ размерности $n \times n$ над полем $\mathbb{F}_2$. Постройте алгоритм, который работает $O(n^2)$ и

   - возвращает 1, если $A \cdot B = C$ с вероятностью 1;
   - возвращает 0, если $A \cdot B \neq C$ с вероятностью не меньше $\frac{1}{2}$.

3. Есть три контейнера. В одном из них лежит золотой шар. Оба других пусты. Разрешается открыть только один контейнер. Вы сели на первый попавшийся, и в этот момент открылся второй. Он оказался пуст. Есть ли теперь разница, какой контейнер открывать? Ответ обосновать.

# 6 Практика 5. Динамика

## 6.1 Домашнее задание

**Дедлайн: 20 октября, 23.59**

1. На билете есть $2n$ значный номер. Билет считается счастливым, если сумма первых $n$ цифр совпадает с суммой последних $n$ цифр. По заданому числу $n$ требуется найти число счастливых $2n$ значных билетов за $O(n^2)$. Считать, что стандартные арифметические операции над числами выполняютися за $O(1)$.

2. Судно атакуют пираты. Для каждого пирата известны его азимут $a_i$ и время $t_i$, через которое пират приплывет и совершит непотребство. Однако, у судна есть лазерная пушка, которой оно защищается. У пушки есть начальный азимут $a$ и угловая скорость вращения $\omega$. Пушка уничтожает все объекты, на которые она сейчас направлена. Помогите судну определить порядок уничтожения пиратов за $O(n^2)$, чтобы не допустить непотребства.

3. Дан текст из слов длины $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Порядок слов менять нельзя. Хотим сделать красивый абзац. В красивом абзаце длина каждой строки ровно $L$ (остаток заполняется пробелами). Между каждой парой слов стоит хотя бы один пробел. Обозначим число пробелов в строке $i$ через $gap_i$. Нужно сделать абзац с минимальным значением $\sum_i gap_i^3$, где сумма пробегается по всем строкам построенного абзаца. Решить за $O(n \cdot L)$.

4. Есть три контейнера. В одном из них лежит золотой шар. Оба других пусты. Разрешается открыть только один контейнер. Вы сели на первый попавшийся. Известно, что в этот момент откроется один из двух других. Если в одном из них есть золотой шар, то второй открывается с вероятностью $p$. Открылся пустой. Какова вероятность, что в контейнере, на котором вы сидите, есть золотой шар?

   Решить в общем случае, при $p = 1$ и $p = \frac{1}{2}$.