Практика по алгоритмам у бакалавров

Сергей Копелиович, Всеволод Опарин

Группа Опарина, Осень, 2014

1 Практика 1. Суммы, циклы

1.1 Теория

Арифметическая прогрессия

- $\sum\limits_{n=a}^{b} n = \frac{(b+a)(b-a+1)}{2}$
- $\sum\limits_{n=1}^{a} n = \frac{a(a+1)}{2}$

Геометрическая прогрессия

- $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$
- При $-1 < q < 1$: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}$
- Если $q = \frac{1}{1+\varepsilon}$: $1 - q = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \approx \varepsilon \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} (1+\varepsilon)^{-k} \approx \frac{1}{\varepsilon}$

Сумма гармонического ряда

- $1 + \lfloor \log_2 n \rfloor \geq \frac{1}{1} + \overbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}^{1} + \overbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}^{1} + \overbrace{\frac{1}{8} + \dots}^{1 \dots} \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \geq \frac{1}{1} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{1/2} + \dots \geq 1 + \frac{1}{2} \lfloor \log_2 n \rfloor \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \Theta(\log n)$

Про интегралы

- Формула Ньютона-Лейбница: $\int\limits_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$
- Пример: $\ln'(n) = \frac{1}{n} \Rightarrow \int\limits_1^n \frac{1}{x}dx = \ln n - \ln 1 = \ln n$
- $\int\limits_a^b \left[\min\limits_{y\in[a..b]} f(y)\right]dx \le \int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b \left[\max\limits_{y\in[a..b]} f(y)\right]dx$
- Для монотонно убывающей $f(x)$ имеем $f(a) \ge \int\limits_a^{a+1} f(x)dx \ge f(a+1)$.
- Для монотонно возрастающей $f(x)$ имеем $f(a) \le \int\limits_a^{a+1} f(x)dx \le f(a+1)$.
- Пусть $X(n) = \sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{i}$, значит, $X(n) - \frac{1}{n} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \ge \int\limits_1^n \frac{1}{x}dx = \ln n \ge \sum\limits_{i=2}^n \frac{1}{i} = X(n) - 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \ln n + \frac{1}{n} \le X(n) \le \ln n + 1 \Rightarrow X(n) = \ln n + \mathcal{O}(1)$

1.2 Класс

Задачи про суммы

1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{n}{2^k}$
2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{n}{1.01^k}$
3. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$
4. $\prod\limits_{k=2}^{n} (1 - k^{-2})$
5. $\prod\limits_{k=1}^{n} (2 \cdot 4^k)$

Задачи про циклы for. Во всех задачах нужно ответить на вопрос “за сколько работает”:

1. Найти такие a, b, c: $abc = N$, $a + b + c = \min$. Решение:

```
for (a = 1; a <= N; a++)
    for (b = 1; a * b <= N; b++)
        c = N / a / b, ... ;
```

2. Поиск делителей без деления

```
b = N;
for (a = 1; a * a <= N; a++) {
    while (a * b > N)
        b--;
    if (a * b == N)
        printf("%d %d\n", a, b);
}
```

3. Еще одно решение задачи (1)

```
for (a = 1; a * a * a <= N; a++)
    for (b = 1; b * b <= N; b++)
        c = N / a / b, ... ;
```

Получить $\mathcal{O}(N^{5/6})$

4. (*) И еще одно решение задачи (1)

```
for (a = 1; a * a * a <= N; a++)
    for (b = a; a * b * b <= N; b++)
        c = N / a / b, ... ;
```

Получить $\mathcal{O}(N^{2/3})$

1.3 Домашнее задание

Дедлайн: 15 сентября, 23.59

Задачи на цикл for. Оцените время работы.

1. Про строки

```
for (a = 1; a < n; a++)
    for (b = 0; b < n; b += a)
        ;
```

2. Partition

```
a = 1, b = n;
while (a < b) {
    while (x[a] < M && a <= b) a++;
    while (x[b] > M && a <= b) b--;
    if (a <= b) swap(x[a++], x[b--]);
}
```

   Дополнительный вопрос: что делает этот код?

3. Логарифмы

```
while (a >= 2)
    a = sqrt(a);
```

   Дополнительный вопрос: а если бы вместо 2 было бы 1?

4. Решето Эратосфена

```
for (p = 2; p < n; p++)
    if (min_divisor[p] == 0) // is prime
        for (x = p + p; x < n; x += p)
            if (min_divisor[x] == 0)
                min_divisor[x] = p;
```

   (*) Доказать $\mathcal{O}(N \log\log N)$ (пользуемся не доказанным фактом: $p_n \approx n \ln n$)

5. Перестановки и циклы

```
for (i = 0; i < n; i++)
    if (used[i] == 0)
        for (j = i; used[j] == 0; j = (j*17+2) % n)
            used[j] = 1;
```

Суммы

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$

3. Докажите, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{3/2}} = \mathcal{O}(1)$

2 Практика 2. Элементарные структуры данных

2.1 Класс

1. Дана послеодвательность чисел $a_1, a_2, \cdots, a_n$ и число S. Все числа положительные целые. Требуется за линейное время найти подотрезок последовательности такой, что сумма его элементов $\sum_{i=l}^{r} a_i = S$. Врямя – $O(n)$.

2. Дана послеодвательность чисел $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Все числа целые. Требуется за линейное время найти подотрезок последовательности такой, что сумма его элементов $\sum_{i=l}^{r} a_i$ максимальна. Врямя – $O(n)$.

3. Дана последовательность чисел: $x_1 = a,\ x_{i+1} = f(x_i)$, найти с $O(1)$ дополнительной памяти длину периода T и предпериода L за время $\mathcal{O}(L + T)$.

4. Частичные суммы:

   (a) Много раз сделать `+=` на отрезке, в конце один раз вывести массив.

   (b) Сперва много раз `+=` на отрезке, затем много раз "сумма на отрезке".

   (c) В каждой целой точке x числовой прямой есть $f[x]$, изначально равная нулю. Те же запросы, что и в предыдущем пункте. Координаты запросов целые от 0 до 10^{18}.

2.2 Домашнее задание

Дедлайн: 22 сентября, 23.59

1. Задачи на стек.

   (a) В массиве найти для каждого элемента ближайший меньший среди соседей слева и справа за $O(n)$.

   (b) В последовательности $a_1, a_2, \cdots, a_n$ найти подотрезок, на котором максимизируется значение $(r - l + 1) \cdot \min_{i \in [l,r]} a_i$, за $O(n)$.

   (c) Дана матрица из нулей и единиц. Найти наибольший по площади подпрямоугольник, состоящий только из нулей за $O(n^2)$.

2. Дан массив из $2n$ чисел. Найти минимальное **И** максимальное за $3n-2$ сравнения.

3. Для этих задач приведите код на C++. Время работы алгоритма должно быть линейно. Множество и мультимножество можно хранить в виде отсортированного массива. Даны два множества A и B в отсортированном виде, за $\mathcal{O}(|A| + |B|)$ построить в таком же виде их

   (a) пересечение. Пример: $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 4\} = \{2\}$.

(b) разность. Пример: $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 4\} = \{1, 3\}$.

(c) объединение. Пример: $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

P.S. Если вы пишете в LaTeX, попробуйте заодно пакет `\usepackage{minted}`. В `dropbox` Сережи Копелиовича есть пример. За подробной справкой можно обращаться к нему и Диме Лапшину.

3 Практика 3. Сортировки

3.1 Класс

1. Даны два массива a и b длины n, сгенерировать все попарные суммы $a_i + b_j$ в сортированном порядке.

   (a) За $\mathcal{O}(n^2 \log n)$.

   (b) За $\mathcal{O}(n^3)$ с использованием $\mathcal{O}(n)$ дополнительной памяти.

   (c) За $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ с использованием $\mathcal{O}(n)$ дополнительной памяти.

2. В свободное время Анка-пулеметчица любит сортировать патроны по серийным номера. Вот и сейчас она только разложила патроны на столе в строго отсортированном порядке. Но тут Иван Васильевич распахнул дверь с такой силой, что все патроны на столе подпрыгнули и немного перемешались. Оставив ценные указания, Иван Васильевич отправился восвояси. Как оказалось, патроны перемешались не сильно. Каждый патрон отклонился от своей позиции не более чем на k. Всего патронов n. Помогите Анке отсортировать патроны.

   (a) Отсортируйте патроны за $\mathcal{O}(nk)$.

   (b) Отсортируйте патроны за $\mathcal{O}(n + I)$, где I — число инверсий.

   (c) Докажите нижнюю оценку на время сортировки $\Omega(n \log k)$.

   (d) Отсортируйте патроны за $\mathcal{O}(n \log k)$.

3. Дан массив из $n+1$ целого числа от 1 до n. Массив доступен только на чтение, есть $\mathcal{O}(1)$ дополнительной памяти. Найти за $\mathcal{O}(n)$ любое число, которое встречается хотя бы два раза.

4. Дано n точек на плоскости. Соединить их

   (a) $(n-1)$–звенной ломаной без самопересечений (не замкнутой);

   (b) n–звенной ломаной без самопересечений (замкнутой)

   за $\mathcal{O}(n \log n)$.

5. Дан набор из N отрезков $[a_i, b_i]$. Числа a_i, b_i — вещественные.

   (a) Найти такое вещественное x, что $|\{i \colon x \in [a_i, b_i]\}|$ максимально.

   (b) Длину объединения отрезков.

   (c) Для каждого k посчитать, сколько точек на прямой покрыто ровно k отрезками.

6. Даны два массива из положительных чисел a и b. $|a| = |b|$.
   Выбрать массив p: k различных чисел от 1 до n так, чтобы:

(a) $\sum_{i=1}^{n} a_{p_i} b_{p_i} \to \max$.

(b) $\frac{\sum_{i=1}^{n} a_{p_i}}{\sum_{i=1}^{n} b_{p_i}} \to \max$.

(c) $(\sum_{i=1}^{n} a_{p_i})(\sum_{i=1}^{n} b_{p_i}) \to \max$.

3.2 Домашнее задание

Дедлайн: 29 сентября, 23.59

1. Даны два массива a и b одинаковой длины.
Нужно найти такую перестановку p, что $\sum_{i=1}^{n} a_{p_i} b_i \to \max$. Решение обосновать.

2. Рассмотрим бинарную кучу, у которой дерево необязательно сбалансированно. Пусть $d(v)$ – расстояние вниз от вершины v до ближайшего листа, а $size(v)$ – число вершин в поддереве с корнем в вершине v.

   Куча называется левацкой, если $\forall v\colon d(l[v]) \geq d(r[v])$.

   (a) докажите, что $size(v) \geq 2^{d(v)}$

   (b) напишите быстрый `Merge` для данной кучи, дайте оценку времени работы

3. Дано $2 \cdot n - 1$ коробок с черными и белыми шарами. В i-ой коробке находится w_i белых и b_i черных шаров. Всего в коробках находится W белых и B черных шаров. Требуется выбрать n коробок, чтобы суммарное число белых шаров в них было не менее $\frac{W}{2}$, а черных не менее $\frac{B}{2}$. Решить за $\mathcal{O}(n \log n)$.

4. На прямой расположено n точек p_1, p_2, $\cdots$, p_n в порядке возрастания. Каждая точка имеет вес $w_i \geq 0$. Требуется найти такую точку q, что $\sum_i w_i \cdot |p_i - q|$ имела бы минималь1ное значение. Время работы: $O(n)$.

   Примечание. Точки на вход подаются в порядке возрастания.