

1 Суммы, циклы

1.1 Теория

Арифметическая прогрессия $\sum_{n=a}^b n = \frac{(b+a)(b-a+1)}{2}$

$$\sum_{n=1}^a n = \frac{a(a+1)}{2}$$

Геометрическая прогрессия $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

$$\text{При } -1 < q < 1: \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}$$

$$\text{Если } q = \frac{1}{1+\varepsilon}: 1 - q = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \approx \varepsilon \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (1 + \varepsilon)^{-k} \approx \frac{1}{\varepsilon}$$

Сумма гармонического ряда $1 + \lceil \log_2 n \rceil \geq \frac{1}{1} + \overbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}^1 + \overbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}^1 + \overbrace{\frac{1}{8} + \dots}^{1, \dots} \geq$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \geq$$

$$\frac{1}{1} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{1/2} + \dots \geq 1 + \frac{1}{2} \lceil \log_2 n \rceil \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \Theta(\log n)$$

Про интегралы Формула Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$

$$\text{Пример: } \ln'(n) = \frac{1}{n} \Rightarrow \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n - \ln 1 = \ln n$$

$$\int_a^b \left[\min_{y \in [a..b]} f(y) \right] dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \left[\max_{y \in [a..b]} f(y) \right] dx$$

Поэтому для монотонно убывающей $f(x)$ имеем $f(a) \geq \int_a^{a+1} f(x) dx \geq f(a+1)$.

А для монотонно возрастающей $f(x)$ имеем $f(a) \leq \int_a^{a+1} f(x) dx \leq f(a+1)$.

$$\lceil X(n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}, \text{ значит, } X(n) - \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \geq \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n \geq \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} = X(n) - 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln n + \frac{1}{n} \leq X(n) \leq \ln n + 1 \Rightarrow X(n) = \ln n + \mathcal{O}(1)$$

1.2 Задачи про суммы

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{2^k} = n \cdot 2$
2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{1.01^k} = n \cdot 101$
3. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = X(2n) - \frac{1}{2}X(n) = \ln 2n - \frac{1}{2} \ln n + O(1) = \ln \sqrt{n} + O(1)$
4. $\prod_{k=2}^n (1 - k^{-2}) = \frac{n+1}{2n}$
5. $\prod_{k=1}^n (2 \cdot 4^k) = 2^{n(n+2)}$

1.3 Задачи про циклы for

Во всех задачах нужно ответить на вопрос “за сколько работает”:

1. Найти такие a, b, c : $abc = N$, $a + b + c = \min$. Решение:

```
1. for (a = 1; a <= N; a++)
2.     for (b = 1; a * b <= N; b++)
3.         c = N / a / b, ... ;
```

Ответ: $\mathcal{O}(N \log N)$

2. Поиск делителей без деления

```
1. b = N;
2. for (a = 1; a * a <= N; a++) {
3.     while (a * b > N)
4.         b--;
5.     if (a * b == N)
6.         printf("%d %d\n", a, b);
7. }
```

Ответ: $\mathcal{O}(N)$

3. Еще одно решение задачи (1)

```
1. for (a = 1; a * a * a <= N; a++)
2.     for (b = 1; b * b <= N; b++)
3.         c = N / a / b, ... ;
```

Ответ: $\mathcal{O}(N^{1/2}N^{1/3}) = \mathcal{O}(N^{5/6})$

4. (*) И еще одно решение задачи (1)

```
1. for (a = 1; a * a * a <= N; a++)
2.     for (b = a; a * b * b <= N; b++)
3.         c = N / a / b, ... ;
```

Ответ: $\mathcal{O}(N^{2/3})$

1.4 Домашнее задание

Дедлайн: 23.59 15 сентября

Дайте обоснование указанным оценкам.

1. Про строки

```
1. for (a = 1; a < n; a++)
2.     for (b = 0; b < n; b += a)
3.         ;
```

Ответ: $\mathcal{O}(N \log N)$

2. Partition

```
1. a = 1, b = n;
2. while (a < b) {
3.     while (x[a] < M && a <= b) a++;
4.     while (x[b] > M && a <= b) b--;
5.     if (a <= b) swap(x[a++], x[b--]);
6. }
```

Ответ: $\mathcal{O}(N)$

Дополнительный вопрос: что делает этот код?

3. Логарифмы

```
1. while (a >= 2)
2.     a = sqrt(a);
```

Ответ: $\mathcal{O}(\log \log N)$ Дополнительный вопрос: а если бы вместо 2 было бы 1?

4. Решето Эратосфена

```
1. for (p = 2; p < n; p++)
2.     if (min_divisor[p] == 0) // is prime
3.         for (x = p + p; x < n; x += p)
4.             if (min_divisor[x] == 0)
5.                 min_divisor[x] = p;
```

Ответ: $\mathcal{O}(N \log N)$

(*) Ответ: $\mathcal{O}(N \log \log N)$ (пользуемся не доказанным фактом: $p_n \approx n \ln n$)

5. Перестановки и циклы

```
1. for (i = 0; i < n; i++)
2.     if (used[i] == 0)
```

3. for (j = i; used[j] == 0; j = (j*17+2) % n)
4. used[j] = 1;

Ответ: $\mathcal{O}(N)$

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$

3. Докажите, что $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{3/2}} = \mathcal{O}(1)$

4. (*) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{3/2}}{2^k}$

2 Практика 2. Элементарные структуры данных

2.1 Практика

1. Дана последовательность чисел a_1, a_2, \dots, a_n и число S . Все числа положительные целые. Требуется за линейное время найти подотрезок последовательности такой, что сумма его элементов $\sum_{i=l}^r a_i = S$. Время – $O(n)$.
2. Дана последовательность чисел a_1, a_2, \dots, a_n . Все числа целые. Требуется за линейное время найти подотрезок последовательности такой, что сумма его элементов $\sum_{i=l}^r a_i$ максимальна. Время – $O(n)$.
3. Дана последовательность чисел: $x_1 = a$, $x_{i+1} = f(x_i)$, найти с $O(1)$ дополнительной памяти длину периода T и предпериода L за время $O(L + T)$.
4. Частичные суммы:
 - (a) Много раз сделать += на отрезке, в конце один раз вывести массив.
 - (b) Сперва много раз += на отрезке, затем много раз “сумма на отрезке”.
 - (c) В каждой целой точке x числовой прямой есть $f[x]$, изначально равная нулю. Те же запросы, что и в предыдущем пункте. Координаты запросов целые от 0 до 10^{18} .

2.2 Домашнее задание

Дедлайн: 22 сентября, 23.59

1. Задачи на стек.
 - (a) В массиве найти для каждого элемента ближайший меньший среди соседей слева и справа за $O(n)$.
 - (b) В последовательности a_1, a_2, \dots, a_n найти подотрезок, на котором максимизируется значение $(r - l + 1) \cdot \min_{i \in [l, r]} a_i$, за $O(n)$.
 - (c) Дана матрица из нулей и единиц. Найти наибольший по площади подпрямоугольник, состоящий только из нулей за $O(n^2)$.
2. Дан массив из $2n$ чисел. Найти минимальное **И** максимальное за $3n - 2$ сравнения.
3. Для этих задач приведите код на C++. Время работы алгоритма должно быть линейно. Множество и мультимножество можно хранить в виде отсортированного массива. Даны два множества A и B в отсортированном виде, за $O(|A| + |B|)$ построить в таком же виде их
 - (a) пересечение. Пример: $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 4\} = \{2\}$.

(b) разность. Пример: $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 4\} = \{1, 3\}$.

(c) объединение. Пример: $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

P.S. Если вы пишете в Л^AT_EX, попробуйте заодно пакет `\usepackage{minted}`.
В `dropbox` Сережи Копелиовича есть пример. За подробной справкой можно
обращаться к нему и Диме Лапшину.