1 Суммы, циклы

1.1 Теория

Арифметическая прогрессия $\sum\limits_{n=a}^{b} n = \frac{(b+a)(b-a+1)}{2}$

$\sum\limits_{n=1}^{a} n = \frac{a(a+1)}{2}$

Геометрическая прогрессия $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

При $-1 < q < 1$: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}$

Если $q = \frac{1}{1+\varepsilon}$: $1 - q = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \approx \varepsilon \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty}(1+\varepsilon)^{-k} \approx \frac{1}{\varepsilon}$

Сумма гармонического ряда $1+\lfloor \log_2 n \rfloor \geq \frac{1}{1}+\overbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}^{1}+\overbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}^{1}+\overbrace{\frac{1}{8}+\ldots}^{1\ldots} \geq$

$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots \geq$

$\frac{1}{1} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{1/2} + \cdots \geq 1 + \frac{1}{2}\lfloor \log_2 n \rfloor \Rightarrow$

$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \Theta(\log n)$

Про интегралы Формула Ньютона-Лейбница: $\int\limits_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$

Пример: $\ln'(n) = \frac{1}{n} \Rightarrow \int\limits_1^n \frac{1}{x}dx = \ln n - \ln 1 = \ln n$

$\int\limits_a^b \left[\min\limits_{y\in[a..b]} f(y)\right]dx \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b \left[\max\limits_{y\in[a..b]} f(y)\right]dx$

Поэтому для монотонно убывающей $f(x)$ имеем $f(a) \geq \int\limits_a^{a+1} f(x)dx \geq f(a+1)$.

А для монотонно возрастающей $f(x)$ имеем $f(a) \leq \int\limits_a^{a+1} f(x)dx \leq f(a+1)$.

$\rceil X(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$, значит, $X(n) - \frac{1}{n} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \geq \int\limits_1^n \frac{1}{x}dx = \ln n \geq \sum\limits_{i=2}^{n} \frac{1}{i} = X(n) - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln n + \frac{1}{n} \leq X(n) \leq \ln n + 1 \Rightarrow X(n) = \ln n + \mathcal{O}(1)$

1.2 Задачи про суммы

1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{n}{2^k} = n \cdot 2$

2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{n}{1.01^k} = n \cdot 101$

3. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{1}{n} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = X(2n) - \frac{1}{2}X(n) = \ln 2n - \frac{1}{2}\ln n + O(1) = \ln \sqrt{n} + O(1)$

4. $\prod\limits_{k=2}^{n} (1 - k^{-2}) = \frac{n+1}{2n}$

5. $\prod\limits_{k=1}^{n} (2 \cdot 4^k) = 2^{n(n+2)}$

1.3 Задачи про циклы for

Во всех задачах нужно ответить на вопрос “за сколько работает”:

1. Найти такие a, b, c: $abc = N$, $a + b + c = \min$. Решение:
```
for (a = 1; a <= N; a++)
    for (b = 1; a * b <= N; b++)
        c = N / a / b, ... ;
```
   Ответ: $\mathcal{O}(N \log N)$

2. Поиск делителей без деления
```
b = N;
for (a = 1; a * a <= N; a++) {
    while (a * b > N)
        b--;
    if (a * b == N)
        printf("%d %d\n", a, b);
}
```
   Ответ: $\mathcal{O}(N)$

3. Еще одно решение задачи (1)
```
for (a = 1; a * a * a <= N; a++)
    for (b = 1; b * b <= N; b++)
        c = N / a / b, ... ;
```
   Ответ: $\mathcal{O}(N^{1/2}N^{1/3}) = \mathcal{O}(N^{5/6})$

4. (*) И еще одно решение задачи (1)
```
for (a = 1; a * a * a <= N; a++)
    for (b = a; a * b * b <= N; b++)
        c = N / a / b, ... ;
```
   Ответ: $\mathcal{O}(N^{2/3})$

1.4 Домашнее задание

Дедлайн: 23.59 15 сентября

Дайте обоснование указанным оценкам.

1. Про строки

```
for (a = 1; a < n; a++)
    for (b = 0; b < n; b += a)
        ;
```

Ответ: $\mathcal{O}(N \log N)$

2. Partition

```
a = 1, b = n;
while (a < b) {
    while (x[a] < M && a <= b) a++;
    while (x[b] > M && a <= b) b--;
    if (a <= b) swap(x[a++], x[b--]);
}
```

Ответ: $\mathcal{O}(N)$
Дополнительный вопрос: что делает этот код?

3. Логарифмы

```
while (a >= 2)
    a = sqrt(a);
```

Ответ: $\mathcal{O}(\log \log N)$ Дополнительный вопрос: а если бы вместо 2 было бы 1?

4. Решето Эратосфена

```
for (p = 2; p < n; p++)
    if (min_divisor[p] == 0) // is prime
        for (x = p + p; x < n; x += p)
            if (min_divisor[x] == 0)
                min_divisor[x] = p;
```

Ответ: $\mathcal{O}(N \log N)$

(*) Ответ: $\mathcal{O}(N \log \log N)$ (пользуемся не доказанным фактом: $p_n \approx n \ln n$)

5. Перестановки и циклы

```
for (i = 0; i < n; i++)
    if (used[i] == 0)
```

```
        for (j = i; used[j] == 0; j = (j*17+2) % n)
            used[j] = 1;
```

Ответ: $\mathcal{O}(N)$

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$

3. Докажите, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{3/2}} = \mathcal{O}(1)$

4. (*) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^{3/2}}{2^k}$

2 Практика 2. Элементарные структуры данных

2.1 Практика

1. Дана последовательность чисел $a_1, a_2, \cdots, a_n$ и число S. Все числа положительные целые. Требуется за линейное время найти подотрезок последовательности такой, что сумма его элементов $\sum_{i=l}^{r} a_i = S$. Врямя – $O(n)$.

2. Дана последовательность чисел $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Все числа целые. Требуется за линейное время найти подотрезок последовательности такой, что сумма его элементов $\sum_{i=l}^{r} a_i$ максимальна. Врямя – $O(n)$.

3. Дана последовательность чисел: $x_1 = a,\ x_{i+1} = f(x_i)$, найти с $O(1)$ дополнительной памяти длину периода T и предпериода L за время $\mathcal{O}(L + T)$.

4. Частичные суммы:

   (a) Много раз сделать `+=` на отрезке, в конце один раз вывести массив.

   (b) Сперва много раз `+=` на отрезке, затем много раз "сумма на отрезке".

   (c) В каждой целой точке x числовой прямой есть $f[x]$, изначально равная нулю. Те же запросы, что и в предыдущем пункте. Координаты запросов целые от 0 до 10^{18}.

2.2 Домашнее задание

Дедлайн: 22 сентября, 23.59

1. Задачи на стек.

   (a) В массиве найти для каждого элемента ближайших меньших соседей слева и справа за $O(n)$.

   (b) В последовательности $a_1, a_2, \cdots, a_n$ найти подотрезок, на котором максимизируется значение $(r - l + 1) \cdot \min_{i \in [l,r]} a_i$.

   (c) Дана матрица из нулей и единиц. Найти наибольший по площади подпрямоугольник, состоящий только из нулей за $O(n^2)$.

2. Дан массив из $2n$ чисел. Найти минимальное **И** максимальное за $3n - 2$ сравнения.

3. Множество и мультимножество можно хранить в виде отсортированного массива. Даны два множества A и B в отсортированном виде, за $\mathcal{O}(|A| + |B|)$ построить в таком же виде их

   (a) пересечение. Пример: $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 4\} = \{2\}$.

   (b) разность. Пример: $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 4\} = \{1, 3\}$.

(c) объединение. Пример: $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

P.S. Если вы пишете в LaTeX, попробуйте заодно пакет `\usepackage{minted}`. В `dropbox` Сережи Копелиовича есть пример. За подробной справкой можно обращаться к нему и Диме Лапшину.