

Математическая логика и теория вычислимости

Лекция 12. Неразрешимые множества и их свойства

Денис Николаевич Москвин

Кафедра математических и информационных технологий
Санкт-Петербургского академического университета

02.12.2014

- 1 Последовательность Шпеккера
- 2 Теорема Успенского-Райса
- 3 Теорема Клини о неподвижной точке

- 1 Последовательность Шпеккера
- 2 Теорема Успенского-Райса
- 3 Теорема Клини о неподвижной точке

Последовательность Шпеккера

- Мы доказали неразрешимость множества

$$W = \{n \mid \langle n \rangle(n) \neq \perp\}$$

- Однако W перечислимо, запустим перечисляющий алгоритм, получим последовательность

$$w_1, w_2, w_3, \dots$$

Последовательность Шпеккера

- Мы доказали неразрешимость множества

$$W = \{n \mid \langle n \rangle(n) \neq \perp\}$$

- Однако W перечислимо, запустим перечисляющий алгоритм, получим последовательность

$$w_1, w_2, w_3, \dots$$

- Частичные суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-w_n}$$

называют последовательностью Шпеккера (Specker sequence). Ее предел невычислим.

- Придумал Ernst Specker, 1949.

- 1 Последовательность Шпеккера
- 2 Теорема Успенского-Райса
- 3 Теорема Клини о неподвижной точке

- Напомним примеры неразрешимых множеств

$$W = \{n \mid \langle n \rangle(n) \neq \perp\}$$

$$H = \{(n, x) \mid \langle n \rangle(x) \neq \perp\}$$

- Неразрешимость второго мы доказывали сведением к первому.
- Если бы был разрешающий алгоритм для H , то запуская его на входах (n, n) сделали бы множество W разрешимым.
- Этот метод доказательства неразрешимости можно обобщить.

- Говорят, что множество A *m-сводится* к множеству B , нотация $A \leq_m B$, если существует всюду определенная вычислимая функция f , такая что

$$\forall x (x \in A \leftrightarrow f(x) \in B)$$

- **Утверждение.** Если $A \leq_m B$ и B — разрешимо, то A — разрешимо.
- **Утверждение.** Если $A \leq_m B$ и B — перечислимо, то A — перечислимо.
- **Утверждение.** Сведение транзитивно.
- **Пример.** $W \leq_m \mathbb{N}$. Действительно, в качестве f мы можем взять $n \mapsto (n, n)$. Если бы \mathbb{N} было разрешимо, то и W тоже, что неверно.

- Рассмотрим

$$H_0 = \{n \mid \langle n \rangle(0) \neq \perp\}$$

- Является ли H_0 неразрешимым?

- Рассмотрим

$$H_0 = \{n \mid \langle n \rangle(0) \neq \perp\}$$

- Является ли H_0 неразрешимым? Да.
- Покажем, что

$$H \leq_m H_0$$

- Рассмотрим

$$H_0 = \{n \mid \langle n \rangle(0) \neq \perp\}$$

- Является ли H_0 неразрешимым? Да.
- Покажем, что

$$H \leq_m H_0$$

- В качестве f возьмем $(n, x) \mapsto \sharp A$, где алгоритм A игнорирует свой вход и запускает $\langle n \rangle(x)$.

- Рассмотрим

$$I_0 = \{n \mid \forall x. \langle n \rangle(x) = 0\}$$

- Покажем, что

$$W \leq_m I_0$$

- В качестве f возьмем $n \mapsto \#A$, где алгоритм A вычисляет $\langle n \rangle(n)$ и возвращает 0.

- Два алгоритма A и B называют *эквивалентными*, нотация $A \sim B$, если результат их работы совпадает:

$$\forall x. (A(x) = \perp \rightarrow B(x) = \perp) \vee \\ (A(x) \neq \perp \rightarrow B(x) \neq \perp \wedge A(x) = B(x))$$

- Эквивалентные алгоритмы задают одну и ту же вычислимую функцию.
- Число шагов может отличаться.

Теорема Успенского-Райса

- Два натуральных числа $m, n \in \mathbb{N}$ называют *эквивалентными*, нотация $m \equiv n$, если $\langle m \rangle \sim \langle n \rangle$.
- Множество $S \subset \mathbb{N}$ называют *инвариантным*, если оно вместе с любым своим элементом содержит его класс эквивалентности по отношению \equiv .

$$\forall m. \forall n. (m \equiv n) \rightarrow (m \in S \wedge n \in S) \vee (m \notin S \wedge n \notin S)$$

- **Утверждение.** Если S — инвариантно, то $\mathbb{N} \setminus S$ тоже инвариантно.
- Числовое множество назовем *тривиальным*, если оно пусто или совпадает с \mathbb{N} .
- **Теорема (Успенского-Райса).** Если инвариантное множество разрешимо, то оно тривиально.

Доказательство теоремы Успенского-Райса

(От противного). Пусть S — инвариантно, нетривиально, но разрешимо. Рассмотрим два алгоритма L и A со свойствами:

$$\forall x. L(x) = \perp \quad \exists x. A(x) \neq \perp$$

Пусть $\#A \in S$, $\#L \in \mathbb{N} \setminus S$. Рассмотрим произвольное неразрешимое перечислимое W и зададим функцию

$$V(n, x) = \begin{cases} A(x), & n \in W, \\ \perp, & n \notin W. \end{cases}$$

V вычислима: полуразрешающий алгоритм для W , потом $A(x)$. Ее сечения $V_n(x)$ вычислимы для любого n ; алгоритм определим так

$$V_n = \begin{cases} A, & n \in W, \\ L, & n \notin W. \end{cases}$$

$$n \in W \leftrightarrow \#V_n \in S, \quad W \leq_m S. \quad \blacksquare$$

- 1 Последовательность Шпеккера
- 2 Теорема Успенского-Райса
- 3 Теорема Клини о неподвижной точке

Лемма о продолжении

Лемма. Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{N}$ — вычислимая функция. Тогда существует всюду определенная функция $g(x)$ — продолжение функции $f(x)$ по отношению \equiv , то есть для всех $x \in D$:

$$f(x) \equiv g(x)$$

Доказательство. Рассмотрим алгоритм $A(n, x)$ с «кодом»

```
k := f(n)
return ⟨k⟩(x)
```

Рассмотрим его проекции $A_n(x) = A(n, x)$ и положим

$$g(n) = \#A_n$$

Эта функция вычислима, **всюду определена** и эквивалентна f . Действительно, для произвольного y

$$\langle g(n) \rangle(y) = A_n(y) = A(n, y) = \langle f(n) \rangle(y) \quad \blacksquare$$

Теорема Кли́ни (о неподвижной точке). Пусть h — всюду определенная вычислимая функция. Тогда существует такое m , что

$$h(m) \equiv m$$

Доказательство. Пусть $u(n) = \langle n \rangle(n)$, а $g(n)$ — ее \equiv -продолжение до всюду определенной функции. Рассмотрим всюду определенную вычислимую

$$t(n) = h(g(n))$$

Докажем, что неподвижная точка $m = g(\#t)$:

$$h(m) = h(g(\#t)) = t(\#t) = u(\#t) \equiv g(\#t) = m \quad \blacksquare$$

Главная универсальная функция

- У нас имеется вычислимая универсальная функция $U(n, x) = \langle n \rangle(x)$.
- Легко показать, что для любой другой вычислимой $V(n, x)$ верно, что существует всюду определенная вычислимая функция f , такая что

$$V(n, x) = U(f(n), x)$$

- Функции, обладающими подобным свойством, называются *главными* или *гёделевыми*.

Теорема Кли́ни (о неподвижной точке). Пусть $U(n, x)$ — главная вычислимая универсальная функция, а $V(n, x)$ — произвольная вычислимая функция. Тогда U и V совпадают на некотором сечении $U_p = V_p$, то есть

$$\exists p. \forall x. U(p, x) = V(p, x)$$

Доказательство. Поскольку U — главная, то для любых n и x верно

$$V(n, x) = U(h(n), x)$$

Берем за p неподвижную точку функции h . ■

В частности, для произвольной вычислимой $V(n, x)$ верно

$$\exists p. \forall x. \langle p \rangle(x) = V(p, x)$$

- Сколько всего у вычислимой функции неподвижных точек?

- Сколько всего у вычислимой функции неподвижных точек?
- Бесконечно много.
- Если бы была одна, мы могли бы переопределить ее значение в этой точке, не теряя вычислимости.
- То же рассуждение верно для случая конечного числа неподвижных точек.

Другое доказательство теоремы Успенского-Райса

- Пусть множество S инвариантно, нетривиально, но разрешимо.
- Пусть $p \in S$, $q \notin S$.
- Рассмотрим всюду определенную и вычислимую (из-за разрешимости S) функцию

$$h(x) = \begin{cases} q, & x \in S, \\ p, & x \notin S. \end{cases}$$

- Она не имеет неподвижной точки (из-за инвариантности $p \neq q$). Противоречие. ■

- Квайн (quine) — программа, которая печатает свой текст.
- Название — в честь американского логика Уилларда Куайна (Willard Quine).
- Такая программа обязательно существует, иначе бы не имело неподвижной точки преобразование:

$$m \mapsto \#A$$

где алгоритм A игнорирует свой вход и печатает $\langle m \rangle$.