

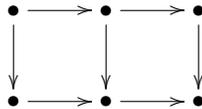
# Задания

16 марта 2018 г.

1. Опишите в категории (пред)порядка следующие конструкции:
  - (a) Начальные объекты.
  - (b) Копроизведения объектов.
2. Докажите, что пулбэк любого мономорфизма также является мономорфизмом.
3. Докажите, что если  $A \amalg B$  существует, то  $B \amalg A$  тоже существует и изоморфен  $A \amalg B$ .
4. Начальный объект  $0$  произвольной категории называется *строгим*, если любой морфизм вида  $X \rightarrow 0$  является изоморфизмом. Например, в **Set** пустое множество является строгим начальным объектом. В **Grp** тривиальная группа не является строгим начальным объектом, хоть и является начальным.

Докажите, что в произвольной категории начальный объект  $0$  является строгим тогда и только тогда, когда для любого  $X$  произведение  $X \times 0$  существует и  $X \times 0 \simeq 0$ .

5. Пусть в диаграмме вида



правый квадрат является пулбэком. Докажите, что левый квадрат является пулбэком тогда и только тогда, когда внешний прямоугольник является пулбэком.

6. Пусть  $f : A \rightarrow B$  и  $g : B \rightarrow C$  – морфизмы в некоторой категории, а  $D \hookrightarrow C$  – некоторый подобъект  $C$ . Докажите, что  $(g \circ f)^{-1}(D) \simeq f^{-1}(g^{-1}(D))$ .
7. Докажите, что в **Ab** существуют все копроизведения.

8. Приведите нетривиальный пример категории, в которой для всех  $A$  и  $B$  существуют сумма и произведение и  $A \amalg B \simeq A \times B$ .
9. Идемпотентный морфизм  $h : B \rightarrow B$  является расщепленным, если существуют  $f : A \rightarrow B$  и  $g : B \rightarrow A$  такие, что  $g \circ f = id_A$  и  $f \circ g = h$ . Докажите, что если в категории существуют коуравнители, то любой идемпотентный морфизм расщеплен.
10. Докажите, что если в категории существуют терминальный объект и пулбэки, то в ней существуют все конечные пределы.