Задания

16 марта 2018 г.

1. Опишите в категории (пред)порядка следующие конструкции:
   (a) Начальные объекты.
   (b) Копроизведения объектов.

2. Докажите, что пулбэк любого мономорфизма также является мономорфизмом.

3. Докажите, что если $A \amalg B$ существует, то $B \amalg A$ тоже существует и изоморфен $A \amalg B$.

4. Начальный объект 0 произвольной категории называется *строгим*, если любой морфизм вида $X \to 0$ является изоморфизмом. Например, в **Set** пустое множество является строгим начальным объектом. В **Grp** тривиальная группа не является строгим начальным объектом, хоть и является начальным.

   Докажите, что в произвольной категории начальный объект 0 является строгим тогда и только тогда, когда для любого X произведение $X \times 0$ существует и $X \times 0 \simeq 0$.

5. Пусть в диаграмме вида

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

   правый квадрат является пулбэком. Докажите, что левый квадрат является пулбэком тогда и только тогда, когда внешний прямоугольник является пулбэком.

6. Пусть $f : A \to B$ и $g : B \to C$ – морфизмы в некоторой категории, а $D \hookrightarrow C$ – некоторый подобъект C. Докажите, что $(g \circ f)^{-1}(D) \simeq f^{-1}(g^{-1}(D))$.

7. Докажите, что в **Ab** существуют все копроизведения.

8. Приведите нетривиальный пример категории, в которой для всех A и B существуют сумма и произведение и $A \amalg B \simeq A \times B$.

9. Идемпотентный морфизм $h : B \to B$ является расщепленным, если существуют $f : A \to B$ и $g : B \to A$ такие, что $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = h$. Докажите, что если в категории существуют коуравнители, то любой идемпотентный морфизм расщеплен.

10. Докажите, что если в категории существуют терминальный объект и пулбэки, то в ней существуют все конечные пределы.