Задание группы образующими и соотношениями, коммутант, абеленизация, центр

Прежде всего напомню, что задачи из 7-го домашнего задания про образующие и соотношения всё ещё принимаются (кроме первой).

Начнём с фактов и определений.

Определение 1. *Пусть x, y два элемента группы G. Тогда выражение $xyx^{-1}y^{-1}$ называется коммутатором x и y. Будем обозначатиь его как $[x, y]$.*

Определение 2. *Коммутантом группы G называется подгруппа порождённая всеми коммутаторами*

$$[G, G] = \langle \{xyx^{-1}y^{-1} \,|\, x, y \in G\} \rangle$$

Факт. Коммутант $[G, G]$ группы G является нормальной подгруппой в G.

Определение 3. *Группа $G/[G, G]$ называется абеленизацией группы G и обозначается G^{ab}.*

Факт. Группа G^{ab} абелева. Более того, группа G^{ab} обладает универсальным свойством. А именно пусть A-абелева группа тогда для любого гомоморфизма $f\colon G \to A$ существует единственный гомоморфизм $\overline{f}\colon G^{ab} \to A$, такой что

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & A \\
G^{ab} \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Это происходит потому, что все коммутаторы $[x, y]$ лежат в ядре отображения в любую абелеву группу.

Факт. Мы кое-что посчитали
а) $F_n^{ab} \cong \mathbb{Z}^n$
б) $\langle x_1, \ldots, x_n \,|\, w^2 = 1$ по всем словам $w \rangle \cong \mathbb{Z}/2^{\times n}$
в) $\langle a, b \,|\, a^2 = b^2 = 1 \rangle \cong D_\infty$
г) $\langle a, b \,|\, a^2 = b^2 = (ab)^5 = 1 \rangle \cong D_5$. В последнем вычислении, в частности, появились несократимые, но эквивалентные слова.

Из этого мы получили два следствия:

Факт. Любая конечнопорождённая абелева группа есть фактор $\mathbb{Z}^n$. Естественно называть $\mathbb{Z}^n$ свободной абелевой группой.

Факт. $F_n \cong F_m$ тогда и только тогда, когда $n = m$. По тем же причинам это верно для $\mathbb{Z}^n$.

Определение 4. *Центр группы G это подгруппа $Z(G) = \{g \in G \,|\, \forall h \in G \;\; hgh^{-1} = g\}$*

Центр использовался при доказательстве теоремы Коши.

Теорема (Коши)**.** *Пусть G конечная абелева группа порядка n. Пусть $n \,\vdots\, p$, где p — простое. Тогда в группе G есть элемент порядка p.*

Задачи

Каждый пункт, как обычно, оценивается как один балл. А теперь обещанная задача.

Задание 1. Пусть $G = \langle x_1, \ldots, x_n \,|\, w^2 = 1$ по всем словам $w\rangle$. Задайте эту группу образующими и конечным числом соотношений.

Аналог задачи, которая была на паре.

Задание 2. Пусть $G = \langle a, b \,|\, a^{16} = b^{12} = 1,\ a^3 b^5 a^{-3} = b^{11}\rangle$. Пусть $H = \langle b^2 \rangle$. Покажите, что H нормальна в G. Найдите G/H.

Найти абеленизацию группы, заданной образующими и соотношениями, довольно просто — надо добавить соотношение коммутативности на образующие. При условии коммутативности все соотношения упрощаются. Задача сводится к поиску факторгруппы группы $\mathbb{Z}^n$ по подгруппе, порождённой какими-то её элементами.

Вычислив абеленизацию можно показать, что группа, заданная образующими и соотношениями нетривиальна, бесконечна и т.д. Пример:

Задание 3. Найдите G^{ab}, и сделайте какие-то выводы про тривиальность и бесконечность G, если
а) $G = \langle a, b \,|\, a^{15} = b^5 = abab^{-1}a^{-1}b^3a^2b^3 = 1\rangle$.
б) $G = \langle a, b \,|\, bab^5a^{-1} = b^2ab^{-3}a^{-1}b = 1\rangle$

Задание 4. Найдите коммутант S_n.

Задание 5. Покажите, что при любом гомоморфизме $f\colon G \to H$ образ коммутанта содержится в коммутанте.

Группа из следующей задачи называется группой кватернионов или кватернионных единиц

Задание 6. Рассмотрим группу $Q = \langle a, b \,|\, a^4 = 1,\ a^2 = b^2,\ aba^{-1} = b^{-1}\rangle$. Найдите
а) Оценку сверху на порядок Q
б) Q^{ab}
в) Подгруппу в S_8, изоморфную Q
г) Центр Q.

Задание 7. Найдите центр A_4 и A_5.

Необязательные задачи

Задание 8. Найдите коммутант A_n.

Следующая задача является продолжением задачи 5.

Задание 9. Пусть $f\colon G \to H$. Покажите, что существует гомоморфизм $f^{ab}\colon G^{ab} \to H^{ab}$ заданный по правилу

$$f^{ab}(\overline{x}) = \overline{f(x)}.$$

Чёрточка обозначает соответствующий смежный класс. Покажите, что для двух отображений $f\colon G \to H$ $g\colon H \to K$ верно $g^{ab} \circ f^{ab} = (g \circ f)^{ab}$.

К следующей задаче сложно бы было подступиться без теоремы Коши. Она позволяет описать группы порядка pq как полупрямые произведения двух циклических групп.

Задание 10. Пусть $|G| = pq$, где p, q — различные простые. Тогда в группе G есть нормальная подгруппа порядка p или q.

Немного в сторону. Если есть группа G, то можно рассмотреть группы $G_1 = [G, G]$ и вообще $G_{i+1} = [G_i, G_i]$. Несложно заметить, что $G_{i+1} \trianglelefteq G_i$ (но, вообще говоря, не во всей группе) и G_i/G_{i+1} абелева. Если $G_n = \{e\}$, то группа G называется разрешимой. Она, грубо говоря, построена из абелевых групп. Имеет место теорема

Теорема. *Группа нечётного порядка разрешима. Более того, группа порядка $2^n p^k$ тоже разрешима.*

Это сложная теорема. Из неё, например, следует, что у любой неабелевой простой группы порядок чётный и имеет больше трёх простых делителей.

Вообще, если у вас есть набор подгрупп G_i в группе G, таких что $G_{i+1} \trianglelefteq G_i$, то такой набор называется нормальным рядом. Если в добавок, G_i/G_{i+1} простая, то нормальный ряд называется композиционным. Вообще говоря, у конечной группы композиционный ряд существует, но не единственен. Однако те простые группы, которые возникают как факторгруппы для разных рядов всегда одни и те же(с учётом количества).

Таким образом вопрос описания всех групп сводится к следующей задаче: даны группы H и H'. Как описать все группы G, такие, что в G есть подгруппа, изоморфная H', фактор по которой изоморфен H. Это нерешённая задача.