Математическая логика и теория вычислимости
Лекция 8. Исчисление предикатов гильбертовского типа

Денис Николаевич Москвин

Кафедра математических и информационных технологий
Санкт-Петербургского академического университета

28.10.2014

План лекции

План лекции

1. Формулировка исчисления
2. Корректность исчисления
3. Вывод из гипотез

Формулы исчисления предикатов

- Напомним правила построения формул логики предикатов
  1. Фиксируется сигнатура, как набор функциональных и предикатных символов заданной арности.
  2. Из индивидных переменных с помощью функциональных символов строятся термы.
  3. Из термов с помощью предикатных символов строятся атомарные формулы.
  4. Из атомарных формул с помощью стандартных пропозициональных связок и кванторов получают формулы логики предикатов.
- Можно ли аналогично исчислению высказываний построить исчисление предикатов?
- То есть: задать аксиомы и правила вывода и получить в результате выводимыми все общезначимые формулы и только их?

Аксиомы исчисления предикатов

- Аксиомы, унаследованные от исчисления высказываний:
  1. $\varphi \to \psi \to \varphi$
  2. $(\varphi \to \psi \to \chi) \to (\varphi \to \psi) \to \varphi \to \chi$
  3. $\varphi \wedge \psi \to \varphi$
  4. $\varphi \wedge \psi \to \psi$
  5. $\varphi \to \psi \to \varphi \wedge \psi$
  6. $\varphi \to \varphi \vee \psi$
  7. $\psi \to \varphi \vee \psi$
  8. $(\varphi \to \chi) \to (\psi \to \chi) \to \varphi \vee \psi \to \chi$
  9. $\neg\varphi \to \varphi \to \psi$
  10. $(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi$
  11. $\varphi \vee \neg\varphi$
- Новые аксиомы:
  12. $\forall x\varphi \to \varphi(x := \tau)$
  13. $\varphi(x := \tau) \to \exists x\varphi$

  Требуется, чтобы указанные подстановки были корректными.

Заведомо корректные подстановки

- Какие частные случаи аксиом
  12. $\forall x \varphi \to \varphi(x := \tau)$
  13. $\varphi(x := \tau) \to \exists x \varphi$

  можно выделить без оговорки о корректности подстановок?
- Всегда можно корректно подставлять константу данной сигнатуры (или, шире, любой терм без переменных).
- Всегда можно корректно подставлять вместо переменной x ее саму, то есть
  - $\forall x \varphi \to \varphi$
  - $\varphi \to \exists x \varphi$

  являются аксиомами.

Правила вывода

- Modus ponens по-прежнему работает

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi}$$

- Помимо этого имеются еще два *правила Бернайса*

$$\frac{\psi \to \varphi}{\psi \to \forall x \varphi} \quad (\mathrm{B}\forall)$$

$$\frac{\varphi \to \psi}{\exists x \varphi \to \psi} \quad (\mathrm{B}\exists)$$

Требуется, чтобы переменная x не была свободна в ψ.

Правило обобщения

- **Утверждение.** Допустимо производное *правило обобщения*:

$$\frac{\varphi}{\forall x \varphi} \qquad (\mathrm{Gen})$$

- **Доказательство.** Действительно, возьмём в качестве ψ заведомо выводимую формулу, например какую-либо аксиому с подставленными в нее замкнутыми формулами. Имеем:

$$\begin{array}{lll}
1 & \psi & \mathrm{Assumption} \\
2 & \varphi & \mathrm{Premise} \\
3 & \varphi \to \psi \to \varphi & \mathrm{A1} \\
4 & \psi \to \varphi & \mathrm{MP}(2)(3) \\
5 & \psi \to \forall x \varphi & \mathrm{B}\forall(4) \\
6 & \forall x \varphi & \mathrm{MP}(1)(5) \ \blacksquare
\end{array}$$

- Исчисление высказываний является полным, поэтому мы можем считать выводимым (в ИП) любой частный случай пропозициональной тавтологии.
- Например, выводимы

$$(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$$
$$(\varphi \to \psi) \to (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$$
$$(\varphi \wedge \psi \to \chi) \to (\varphi \to \psi \to \chi)$$
$$(\varphi \wedge \psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi)$$

- Выведем, например, $\forall x\varphi \to \exists x\varphi$

1	$\forall x\varphi \to \varphi$	A12
2	$\varphi \to \exists x\varphi$	A13
3	$(\forall x\varphi \to \varphi) \to (\varphi \to \exists x\varphi) \to (\forall x\varphi \to \exists x\varphi)$	syllogism
4	$(\varphi \to \exists x\varphi) \to (\forall x\varphi \to \exists x\varphi)$	MP(1)(3)
5	$\forall x\varphi \to \exists x\varphi$	MP(2)(4)

Альтернативная формулировка исчисления

- **Утверждение.** Класс выводимых формул не измениться, если использовать (Gen) вместо $(\mathrm{B}\forall)$ и $(\mathrm{B}\exists)$ в качестве правил вывода, и добавить две дополнительные аксиомы
  14. $\forall x(\psi \to \varphi) \to (\psi \to \forall x \varphi)$
  15. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x \varphi \to \psi)$

  (Как обычно, требуется, чтобы x не была свободна в ψ.)
- **Доказательство.** Покажем, например, что $(\mathrm{B}\forall)$ допустимо, как производное правило:

1	$\psi \to \varphi$	Premise
2	$\forall x(\psi \to \varphi)$	Gen(1)
3	$\forall x(\psi \to \varphi) \to (\psi \to \forall x \varphi)$	A14
4	$\psi \to \forall x \varphi$	MP(2)(3) ■

План лекции

Корректность исчисления предикатов

- Мы хотим доказать, что всякая формула, выводимая в исчислении предикатов, является общезначимой.
- Для этого мы должны проверить все аксиомы на общезначимость и все правила вывода на сохранение общезначимости.
- Аксиомы (A1-11) тривиально общезначимы.
- Правило Modus ponens сохраняет общезначимость.
- Остаются две новые аксиомы и правила Бернайса.

Лемма о подстановке в терм

- **Лемма 1**. Для произвольных термов u и t и произвольной оценки π верно

$$[u(x := t)]_\pi = [u]_{\pi, x := [t]_\pi}$$

- **Доказательство.** Индукция по структуре терма.
  База:
  u – это переменная. Если x, то слева и справа $[t]_\pi$. Если не x (скажем y), то слева и справа $\pi(y)$.
  Индукционный переход:
  тривиально.
  ■

- **Лемма 2**. Для произвольных формулы φ, терма t и произвольной оценки π верно

$$[\varphi(x := t)]_\pi = [\varphi]_{\pi, x:=[t]_\pi}$$

если подстановка t вместо x в φ корректна.

- **Доказательство.** Индукция по структуре формулы.
База:
φ – атомарная формула. Следует из Леммы 1.
Индукционный переход:
Для пропозициональных связок тривиально.
Пусть φ имеет вид $\forall y \psi$, причем x свободен в ψ (иначе — тривиально). По условию подстановка t вместо x в φ корректна, то есть y не свободен в t, откуда подстановка t вместо x в ψ корректна. (см. след. слайд)

Лемма о подстановке в формулу (продолжение)

$$[(\forall y \psi)(x := t)]_\pi = [\forall y(\psi(x := t))]_\pi =$$

$$= \bigwedge_d [\psi(x := t)]_{\pi, y:=d} = \qquad \text{(IH)}$$

$$= \bigwedge_d [\psi]_{\pi, y:=d, x:=[t]_{\pi, y:=d}} = \qquad (y \notin FV(t))$$

$$= \bigwedge_d [\psi]_{\pi, y:=d, x:=[t]_\pi} =$$

$$= \bigwedge_d [\psi]_{\pi, x:=[t]_\pi, y:=d} =$$

$$= [\forall y(\psi)]_{\pi, x:=[t]_\pi} =$$

$$= [\varphi]_{\pi, x:=[t]_\pi}$$

Для φ вида $\exists y \psi$ аналогично. ■

Общезначимость новых аксиом

- Рассмотрим аксиому 12

$$\forall x \varphi \to \varphi(x := \tau)$$

в произвольной интерпретации на произвольной оценке π.

- Пусть $[\forall x \varphi]_\pi = \mathrm{T}$, тогда $[\varphi]_{\pi'} = \mathrm{T}$ для любой π', отличной от π по x; в частности для π' равной $\pi, x := [\tau]_\pi$. Тогда по Лемме 2 $[\varphi(x := \tau)]_\pi = \mathrm{T}$.
- Таким образом аксиома 12 истинна в произвольной интерпретации на произвольной оценке, то есть общезначима.
- Общезначимость аксиомы 13

$$\varphi(x := \tau) \to \exists x \varphi$$

аналогично.

Сохранение общезначимости в правилах Бернайса

- Рассмотрим первое правило Бернайса

$$\frac{\psi \rightarrow \varphi}{\psi \rightarrow \forall x \varphi} \qquad x \notin FV(\psi)$$

- Пусть $\psi \rightarrow \varphi$ общезначима. Рассмотрим произвольную интерпретацию и произвольную оценку π.
- Пусть $[\psi]_\pi = \mathrm{T}$, тогда $[\psi]_{\pi, x=d} = \mathrm{T}$ для любого d из носителя. Но тогда, поскольку $\psi \rightarrow \varphi$ общезначима, $[\varphi]_{\pi, x=d} = \mathrm{T}$. Но это в точности означает, что $[\forall x \varphi]_\pi = \mathrm{T}$.
- Таким образом первое правило Бернайса сохраняет общезначимость.
- Общезначимость второго правила Бернайса

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\exists x \varphi \rightarrow \psi}$$

доказывается аналогично.

Теорема о корректности исчисления предикатов

Итак, мы доказали следующий факт:

- **Теорема (о корректности ИП).** Любая формула, выводимая в исчислении предикатов, является общезначимой.

План лекции

1. Формулировка исчисления
2. Корректность исчисления
3. Вывод из гипотез

Проблема с правилом обобщения

- В исчислении высказываний имело место лемма о дедукции: $\Gamma \vdash A \to B$ тогда и только тогда, когда $\Gamma, A \vdash B$.
- Однако правило (Gen) без дополнительных ограничений порождает проблемы в исчислении предикатов:

$$P(x) \vdash \forall x P(x) \qquad \text{ok, Gen}$$

$$\vdash P(x) \to \forall x P(x) \qquad ???$$

  Последнее необщезначимо.
- Очевидно, что Gen не стоит применять для связывания свободной переменной формулы-гипотезы.
- Иногда этот запрет формализуют явно, но часто удобнее требовать замкнутости гипотез.

Теории

- Произвольное множество замкнутых формул Γ сигнатуры σ называют *теорией* в этой сигнатуре.
- Говорят, что формула φ *выводима из* Γ (является *теоремой* теории Γ), если ее можно вывести, используя аксиомы и формулы из Γ; нотация

$$\Gamma \vdash \varphi$$

- Интерпретация $\mathbb{M}$ сигнатуры σ называется *моделью* теории Γ, если все формулы из Γ истинны в $\mathbb{M}$.

Лемма о дедукции. Пусть Γ — множество замкнутых формул и A — замкнутая формула. Тогда $\Gamma \vdash A \to B$ тогда и только тогда, когда $\Gamma, A \vdash B$.

Доказательство.

- Пусть $\Gamma \vdash A \to B$. Тогда и $\Gamma, A \vdash A \to B$, откуда из $\Gamma, A \vdash A$ по MP получаем искомый результат.
- Пусть $\Gamma, A \vdash B$. Рассмотрим вывод формулы B — последовательность формул

$$C_1, C_2, \ldots, C_n$$

где C_n это B. Формула C_i может быть: (1) A, (2) из Γ, (3) аксиомой, (4) результатом применения MP к двум предыдущим, (5) результатом применения $B\forall$ к предыдущей формуле, (6) результатом применения $B\exists$ к предыдущей формуле.

Припишем ко всем формулам вывода посылку A и покажем, что эту цепочку можно расширить до вывода.

(1-4). Идентично случаю исчисления высказываний.

(5). В новой цепочке имеется переход от $A \to (\psi \to \varphi)$ к $A \to (\psi \to \forall x \varphi)$. Вставляем формулы

$$
\begin{aligned}
&A \to \psi \to \varphi \\
&A \wedge \psi \to \varphi \\
&A \wedge \psi \to \forall x \varphi \\
&A \to \psi \to \forall x \varphi
\end{aligned}
$$

(6). В новой цепочке имеется переход от $A \to (\varphi \to \psi)$ к $A \to (\exists x \varphi \to \psi)$. Вставляем формулы

$$
\begin{aligned}
&A \to \varphi \to \psi \\
&\varphi \to A \to \psi \\
&\exists x \varphi \to A \to \psi \\
&A \to \exists x \varphi \to \psi
\end{aligned}
$$

■

Свойства выводимости из гипотез

- Если $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \subset \Delta$, то $\Delta \vdash A$.
- Если $\Gamma \vdash A$, то существует конечное $\Delta \subset \Gamma$, такое что $\Delta \vdash A$.
- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \vdash A$ тогда и только тогда, когда

$$\vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to A$$

- **Теорема о корректности ИП (ver.2)**. Все теоремы теории Γ истинны в любой модели M этой теории.
- **Доказательство.** Пусть A — теорема Γ, тогда найдутся $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k \in \Gamma$, такие что

$$\vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_k \to A$$

Эта формула выводима, значит истинна во всех интерпретациях (в т.ч. в M). Но в M истинны все φ_i (поскольку это модель), значит заключение импликации A тоже истинно. ■