Домашнее задание

Для самостоятельного решения предлагается две задачи на “запрогать”. Задачи довольно простые, поэтому я считаю возможным назначить дедлайн на следующую пару — там мы эти задачи разберем и обсудим результаты.

1.1 Marksman

Рассмотрим следующую задачу:

Задача. На квадратном стенде нарисована круглая мишень. Края мишени касаются всех четырех краев стенда. Стрелок бьет по мишени, но попадает каждый раз в произвольную точку стенда. Найти вероятность попасть в мишень при единственном выстреле.

В общем, это несложная задача на геометрическую вероятность (и, я надеюсь, все знают, как ее решать). Но я предлагаю пойти “программистским” путем и решить задачу с помощью моделирования, т.е. промоделировать серию выстрелов и оценить вероятность попадания через частоту (т.е. отношение числа попаданий к общему числу выстрелов).

Вполне можно ожидать, что с увеличением длины серии N частота будет стремиться к точному значению вероятности (пока мы не обсуждаем, в каком смысле это “стремление” происходит, ограничимся интуитивным пониманием происходящего). Это “стремление” и предлагается пронаблюдать, т.е. увеличивая число выстрелов N (разумно делать это в геометрической прогрессии с шагом, например, 10) изучить поведение отклонения оценки вероятности от истинного значения.

1.2 Boar

Рассмотрим следующую задачу:

Задача. Три охотника охотились на кабана. Первый бьет кабана с одного выстрела с вероятностью 0.4, второй — с вероятностью 0.3, а третий — с вероятностью 0.2. Они одновременно заметили кабана и одновременно выстрелили. Когда они подошли к убитому кабану, выяснилось, что он был убит одной пулей. Какова вероятность, что его убил второй охотник?

Эта задача решается с помощью формулы Байеса и мы разобрали решение в классе.

Сейчас же я предлагаю снова использоваться моделирование для проверки решения, оценивая вероятность события как долю успехов в испытаниях. В этой задаче можно фиксировать число испытаний (скажем, $N = 10^6$) и не отслеживать сходимость.

Hint: На первый взгляд непонятно, как моделировать событие “кабан убит строго одной пулей”. На самом деле, этого делать не нужно. Достаточно просто моделировать стрельбу по кабану, отсеивая при этом случаи, которые не удовлетворяют условию задачи, и искать долю успехов среди оставшихся исходов

Задачи, разобранные в классе

Задача 1. За столом сидят четыре мушкетера, у каждого в руках колода карт на 52 листа. Одновременно каждый достает из колоды одну карту и кладет на стол. Карты перемешивают и вскрывают.

1. Сколько возможных сочетаний карт может быть?
2. Равновероятны ли они?
3. Какова вероятность того, что лежат четыре туза?

Задача 2. Доказать формально следующие свойства вероятности:

1. $P(\varnothing) = 0$.
2. Непрерывность: пусть дана убывающая последовательность событий $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \cdots, B_i \in \mathcal{F}$, $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Тогда $P(B) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$.

Задача 3. Показать, что из равенства $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ не следует попарная независимость A_1, A_2, A_3.

Задача 4. Показать, что из попарной независимости событий A_1, A_2, A_3 не следует их совместная независимость.

Задача 5. Монету подбрасывают n раз. Какова вероятность выпадения четного числа гербов?

Задача 6. На бесконечную, разлинованную с шагом 1, плоскость бросают круглую монету радиуса r. Найти вероятность того, что монета пересечет линию.

Задача 7 (Задача Бюффона)**.** На бесконечную, разлинованную с шагом 1, плоскость бросают тонкую спицу длины 1. Найти вероятность того, что спица пересечет линию.

Задача 8. На бесконечную, разлинованную с шагом 1, плоскость бросают тонкую спицу длины l. Найти вероятность того, что спица пересечет линию.

Еще задачи

Задача 9. Доказать формально следующие свойства вероятности:

1. Монотонность: $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
2. Непрерывность 2: пусть дана возрастающая последовательность событий $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \cdots, B_i \in \mathcal{F}$, $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Тогда $P(B) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$.
3. Формула включений-исключений: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Задача 10. По окончании семестра студентам требуется сдать пять экзаменов: по философии, обществознанию, социологии и два экзамена по математике. Считая, что порядок экзаменов выбирается случайно, найти вероятность того, что экзамены по математике будут стоять подряд.

Задача 11. Рассмотрим покер без замены карт и общей сдачи — каждый игрок просто получает пять карт на руки. Играем колодой на 54 листа (с двумя джокерами). Найти вероятность того, что конкретный игрок получит каре (4 карты одинакового достоинства, при этом джокер может считаться любой картой).

Задача 12. В группе n студентов. Найти вероятность того, что хотя бы у двух студентов совпадает день рождения. Считаем, что все родились не в високосный год, день рождения случаен и все дни при этом равновероятны.

Задача 13. На бесконечную клетчатую (размер клетки 1×1) плоскость бросают круглую монету радиуса r. Найти вероятность того, что монета пересечет линию.

Задача 14. Круглая мишень разделена на десять колец равной толщины. Кольца пронумерованы от 1 до 10, начиная с края. Стрелок бьет по мишени, при этом он с вероятностью 0.2 промахивается, а в противном случае попадает в произвольную точку мишени. Найти вероятность за два выстрела выбить ровно 10 очков.

Задача 15. Найти вероятность вытащить дубль из набора домино.

Задача 16. К семейной паре домой приходят n гостей. Все вместе в случайном порядке рассаживаются за круглым столом. Какова вероятность того, что хозяева будут сидеть рядом?

Задача 17. Из колоды в 52 карты случайно вынимают одну. Если рассмотреть события «выпала пика» и «выпала дама», то легко показать, что они будут независимы по определению. Сохранится ли независимость, если:

1. убрать из колоды пиковую даму;
2. убрать из колоды всех тузов;
3. убрать из колоды всех дам;
4. убрать из колоды всех пик;
5. убрать из колоды бубновую девятку;
6. добавить в колоду джокера;

Более сложные задачи

Задача 18. Игральную кость выбрасывают n раз. Какова вероятность того, что шестерка выпадет нечетное число раз?

Задача 19. Погнутую монету (с вероятностью выпадения герба $p \in (0, 1)$) подбрасывают n раз. Какова вероятность выпадения четного числа гербов?

Задача 20. Рассмотрим покер без замены карт и общей сдачи — каждый игрок просто получает пять карт на руки. Играем колодой на 54 листа (с двумя джокерами). Найти вероятность того, что конкретный игрок получит стрит (пять карт со значениями, идущими подряд, при этом джокер может считаться любой картой).