6 Домашнее задание

6.1 (1 балл). Пусть граф G имеет остовные деревья диаметрами 2 и l. Доказать, что в таком графе для любого $k \in (2, l)$ существует остовное дерево диаметром k.

6.2 (1 балл). Пусть T есть дерево, в котором степень любой вершины, смежной с листом дерева, имеет степень, большую или равную трем. Доказать, что в T обязательно найдется пара листьев, имеющих общего соседа.

6.3 (1 балл). Пусть T есть дерево, в котором имеются только лишь вершины степени 1 и/или k. Сколько вершин может иметь такое дерево? Какой вид оно может иметь?

6.4 (1 балл). Пусть T есть дерево, построенное на n вершинах, у которого имеются ровно по одной вершине степени i, $i = 2, \ldots, k$, а также $n - (k - 1)$ листьев. Выразить n через k.

6.5 (1,5 балла). Рассмотрим произвольную неубывающую последовательность $\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$, $n \geqslant 2$, положительных натуральных чисел. Доказать, что равенство

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 2n - 2, \qquad d_i > 0 \tag{1}$$

является необходимым и достаточным условием того, чтобы эта последовательность была графовой для некоторого дерева T, построенного на n вершинах.

6.6 (1,5 балла). Пусть T_D есть ориентированное дерево, а $F \subseteq E(T_D)$ есть произвольное подмножество множества ребер дерева T_D. Доказать, что в дереве T найдется вершина x, такая, что все ребра из F, инцидентные x, входят в x, а все ребра из подмножества $E(T_D) \setminus F$, инцидентные x, из этой вершины выходят.

6.7 (1,5 балла). Пусть G есть простой граф с $\delta(G) \geqslant k$, а T есть произвольное дерево с k ребрами. Доказать, что в G имеется подграф, изоморфный T.

6.8 (1,5 балла). Пусть T есть дерево с k ребрами, а G — простой граф, построенный на n вершинах и имеющий более чем $n(k-1) - \binom{k}{2}$ ребер. Используя предыдущее упражнение, доказать, что в случае $n > k$ в графе G имеется подграф, изоморфный T.

6.9 (2 балла). Наряду с диаметром при изучении расстояний в графе часто используется так называемый Wiegner index

$$W(G) := \sum_{x,y \in V(G)} d(x, y)$$

графа G, характеризующий среднее расстояние между вершинами в графе. В частности, Вигнер использовал этот индекс для изучения точки плавления парафина. В дальнейшем оказалось, что многие химические свойства молекул связаны с Wiegner index соответствующих этим молекулам графов. Доказать, что среди всех деревьев на n вершинах минимальное значение $W(G)$ достигается на графах-звездах, а максимальное — на путях P_n длины n.

6.10 (1,5 балла). Доказать, что для любого подграфа H графа G расстояние $d_H(x, y)$ между вершинами $x, y \in H$ больше или равно расстоянию $d_G(x, y)$ между теми же вершинами в графе G. Используя данное утверждение, а также предыдущее упражнение, показать, что для любого связного графа G Wiegner index $W(G) \leqslant P_n$. На каком связном графе, построенном на n вершинах, достигается минимум $W(G)$?

6.11 (2 балла)**.** Доказать следующее необходимое условие существования k попарно реберно непересекающихся остовных деревьев в графе G: для любого разбиения множества $V(G)$ вершин графа G на r блоков, $r \in [2, |V(G)|]$, найдется по меньшей мере $k(r-1)$ ребер графа G, концы которых лежат в различных блоках разбиения.

6.12 (2 балла)**.** Пусть у нас имеется какое-то множество G, а также некоторый набор $H_1, \ldots, H_k$ его подмножеств. Говорят, что набор таких подмножеств обладает свойством Хелли (Helly property), если из того, что любая пара таких подмножеств имеет непустое пересечение, следует, что пересечение всех этих подмножеств не пусто. Так, если у нас имеется набор попарно пересекающихся интервалов на прямой, то их пересечение непусто. Доказать, что поддеревья любого дерева обладают свойством Хелли. Иными словами, доказать, что для любого набора $T_1, \ldots, T_k$ поддеревьев дерева T, любые два их которых имеют непустое пересечение, найдется общая для всех этих поддеревьев вершина x. Показать, что в случае связного графа, деревом не являющегося, это свойство может и не выполняться (указание: рассмотреть цикл C_n).

6.13 (2 балла)**.** Пусть дерево T, построенное на n вершинах, имеет диаметр, больший или равный $2k-3$. Доказать, что в таком дереве имеется как минимум $n-k$ путей длины k.