

1. Докажите, что

$$0 < \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx < \frac{1}{100\pi}.$$

2. С помощью интеграла вычислите предел последовательности

$$s_n = \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}}.$$

3. С помощью интеграла вычислите предел последовательности

$$s_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt[3]{(nx+k)^2(nx+k+1)}, \quad x > 0.$$

4. Докажите, что

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) + \gamma + \frac{1}{6(2n+1)^2},$$

где γ – постоянная Эйлера.

5. Исследуйте на сходимость при $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

6. Вычислите или докажите расходимость

$$\int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx.$$

7. Вычислите или докажите расходимость

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x^2+x)}{x} dx.$$

8. Предположим, что $f \in C([-1; 1])$. Вычислите предел последовательности

$$a_n = \int_0^1 x f(\sin(2\pi nx)) dx.$$